



MATEMÁTICA

Volume 02





MATEMÁTICA Volume 02

Frente A

03 3 Sistemas métricos e
base decimal Autor: Paulo
Vinícius Ribeiro

04 9 Médias Autor: Paulo
Vinícius Ribeiro

Frente B

03 15 Equações e
problemas Autor: Paulo
Vinícius Ribeiro

04 23 Razões e
proporções Autor: Paulo
Vinícius Ribeiro

Frente C

03 29 Função Autor: Luiz
Paulo

04 39 Função afim Autor:
Luiz Paulo

Frente D

03 47 Semelhança de
triângulos Autor: Paulo
Vinícius Ribeiro

04 55 Teorema de Tales e
quadriláteros Autor: Paulo
Vinícius Ribeiro

Sumário - Matemática

Frente E 05 61 Funções soma e
fatoração Autor: Frederico Reis **06 65**
Equações e inequações trigonométricas
Autor: Frederico Reis

07 71 Sistema cartesiano
e ponto Autor: Frederico
Reis

2 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Sistemas métricos e 03 A base decimal

BASE DECIMAL DE NUMERAÇÃO

UNIDADES DE COMPRIMENTO

Base numérica é o conjunto de símbolos (ou algarismos) Ao medir um segmento de reta AB , devemos adotar uma

utilizados para representar uma quantidade. unidade de medida e , em seguida, verificar quantas vezes

Diariamente, utilizamos o sistema de numeração decimal essa unidade cabe em AB .

formado pelos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Por exemplo, o comprimento de AB na unidade u

Os demais números são formados agrupando-se dois

ou é 5u, enquanto na unidade é 2v. v mais algarismos e considerando as posições relativas deles.

A B

O número 23, por exemplo, corresponde a $20 + 3$, ou seja,

2 grupos de dez unidades e mais 3 unidades. Já o número 154 A u u u u u B

pode ser decomposto na forma $100 + 50 + 4$, ou seja, 1 grupo v v de cem unidades, 5 grupos de dez unidades e mais 4 unidades.

A unidade de medida adotada como padrão no Sistema

Assim:

Internacional de Unidades (SI) é o metro. No quadro a seguir,

$$23 = 2 \cdot 10 + 3$$

apresentamos os múltiplos e os submúltiplos do metro.

ou

Dezena Unidade **Múltiplos submúltiplos** 2 3

Centena Dezena Unidade quilômetro hectômetro decâmetro decímetro centímetro milímetro

Milhar Centena Dezena Unidade $154 = 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$ 4 km hm dam dm cm mm 2 3 ou Centena Dezena Unidade 1 000 m 100 m 10 m 0,1 m 0,01 m 0,001 m a b c d Dezena Unidade 1 5 4 2 3 Pelo quadro anterior, percebemos que: Milhar Centena Dezena Unidade

$abcd = a.10^3 + b.10^2 + c.10 + d$
 1 km = 10 hm = 100 dam = 1 000 m

Milhar Centena Dezena Unidade
 $1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1 000 \text{ mm}$

a b c d

Concluimos que, para mudarmos de uma unidade para

EXERCÍCIO RESOLVIDO outra,
 procedemos da seguinte maneira:



01. Justapondo-se 82 à esquerda de um número x , Multiplicamos por 10 a cada casa deslocada para a direita.



obtem-se o número z . Justapondo-se 36 à direita



do mesmo número x , obtem-se o número y . Se



$y + z = 1\,563$, determinar a soma dos algarismos de x .



Resolução: Dividimos por 10 a cada casa deslocada para a esquerda.



1ª maneira:



$$82x = z \Rightarrow 8 \cdot 10_2 + 2 \cdot 10 + x = z : 10 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10$$



$$x36 = y \Rightarrow x \cdot 10_2 + 3 \cdot 10 + 6 = y$$

Por hipótese: $y + z = 1\,563$ km hm dam m dm cm mm

$$\text{Então: } 100x + 36 + 820 + x = 1\,563 \Rightarrow x = 7$$

$$x10 \, x10 \, x10 \, x10 \, x10 \, x10$$

2ª maneira:

$$+ 82x \rightarrow z \text{ exemplos } x36 \rightarrow y$$

$$1\ 563\ 1^{\circ})\ 12,73\ \text{km} = 127,3\ \text{hm}$$

O único algarismo que satisfaz a operação anterior é $x = 7$. **2º)**
 $743\ \text{dm} = 74,3\ \text{m} = 7,43\ \text{dam}$

Editora Bernoulli **3**

Frente A Módulo 03

UNIDADES DE ÁREA Múltiplos e submúltiplos

Se a unidade de comprimento padrão é o metro, a
 unidade : 10_3 : 10_3 : 10_3 : 10_3 : 10_3 : 10_3

padrão de área é o m_2 , que corresponde à área de um

$\text{km}_3\ \text{hm}_3\ \text{dam}_3\ \text{m}_3\ \text{dm}_3\ \text{cm}_3\ \text{mm}_3$

quadrado de lado 1 m.

$\times 10_3\ \times 10_3\ \times 10_3\ \times 10_3\ \times 10_3\ \times 10_3$

1 m Para mudarmos de uma unidade de volume para
 outra,

procedemos
 do
 seguinte
 modo:

1 m

Multiplicamos por 10_3 a cada casa deslocada para a direita.

Múltiplos e submúltiplos

$:10_2 :10_2 :10_2 :10_2 :10_2 :10_2$ Dividimos por 10_3 a cada casa deslocada para a esquerda.

$\text{km}_2 \text{ hm}_2 \text{ dam}_2 \text{ m}_2 \text{ dm}_2 \text{ cm}_2 \text{ mm}_2$

exemplos

$\times 10_2 \times 10_2 \times 10_2 \times 10_2 \times 10_2 \times 10_2$ 1º) $1 \text{ hm}_3 = 10_3 \text{ dam}_3 = 10_6 \text{ m}_3$

2º) 2
520
 mm_3
=
2,52
 cm_3

Para mudarmos de uma unidade de área para outra, procedemos da seguinte forma: Comumente, utilizamos a unidade litro e seus múltiplos e

submúltiplos. Veja algumas relações:



Multiplicamos por 10_2 a cada casa deslocada para a direita. $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}_3$



$$1\,000\text{ L} = 1\text{ m}^3$$



$$1\text{ mL} = 1\text{ cm}^3$$



Dividimos por 10^2 a cada casa deslocada para a esquerda.



exemplos EXERCÍCIO RESOLVIDO



1º) 02. (UFOP-MG-2009) Na maquete de uma casa, a réplica
 $0,003\text{ km}_2 = 0,3\text{ hm}_2 = 30\text{ dam}_2 = 3\,000\text{ m}_2$



de uma caixa-d'água de 1 000 litros tem 1 mililitro de



2º) capacidade. Se a garagem da maquete tem 3 centímetros



1 m = 10 dm de largura por 7 centímetros de comprimento, então a



área real da garagem da casa é de



1 m = 10 dm A) 21 cm² . B) 21 m² . C) 210 m² . D) 10 m.



Área = 1 m² = 100 dm² **Resolução:**

OBSERVAÇÃO A caixa-d'água tem capacidade de 1 000 L ou 1 m³,

enquanto sua réplica tem capacidade de 1 mL ou 1 cm³.

1 a (are) = 100 m² Considerando a caixa-d'água com formato cúbico, temos

1 ha (hectare) = 100 a = 10 000 m a situação seguinte: 2

Caixa-d'água

UNIDADES DE VOLUME 1 m 1 cm

1 m 1 cm 1 cm

A unidade padrão de volume é o m^3 , que corresponde ao $1 m$

volume de um cubo de aresta $1 m$.

Portanto, as dimensões da caixa-d'água foram reduzidas em 100 vezes (mesmo que a caixa não seja cúbica).

$1 m$ A garagem da maquete tem $3 cm$ de largura por $7 cm$ de comprimento. Como essas medidas estão reduzidas em 100 vezes, a área real da garagem da casa será dada por:

$1 m$

$$1 m A = (300 cm).(700 cm) = (3 m).(7 m) = 21 m^2$$

4 Coleção Estudo

Sistemas métricos e base decimal

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UERJ) João mediu o comprimento do seu sofá com o **01.** (UFMG) De um tecido de 1,2 m de largura, Maria cortou

auxílio de uma régua. 780 quadrados de 24 cm de lado. O comprimento do



tecido gasto, em metros, é

A) 3,774

B) 15,6

C)
22,46

D)
37,44

Colocando 12 vezes a régua na direção do comprimento,

sobraram 15 cm da régua; por outro lado, estendendo

11 vezes, faltaram 5 cm para atingir o comprimento total. E) 156

O comprimento do sofá, em centímetros, equivale a

02. (UFMG) O volume de um paralelepípedo retângulo de

A) 240 B) 235 C) 225 D) 220

dimensões 90 cm, 2 m e 7,5 dm é

02. A) $1,35 \times 10^{-2} \text{ m}^3$. (UFJF-MG) A densidade demográfica de uma certa

cidade é de 0,002 habitantes por metro quadrado. B) $1,35 \times 10^{-1} \text{ m}^3$.

Se essa cidade ocupa uma área de 180 km^2 , o número C) $1,35 \text{ m}^3$.

de seus habitantes é 2 D) $1,35 \times 10 \text{ m}^3$.

A) 36 milhões. D) 3,6 milhões.

E) $1,35 \times 10^3 \text{ m}^3$.

B) 9 milhões. E) 60 mil.

C) 360 mil. **03.** (UFOP-MG–2008) Uma certa região foi mapeada de tal

maneira que 10 km correspondem, na escala do mapa,

03. (UFMG–2006) Sejam **N** um número natural de dois a 4 cm. Um quadrado de área $1,6 \text{ km}^2$ corresponde, no **MATEMÁTICA**

algarismos não nulos e **M** o número obtido invertendo-se mapa, a um quadrado de lado, em cm, igual a

a ordem dos algarismos de **N**. Sabe-se que $N - M = 45$. A) $0,16^{110}$

Então, quantos são os **possíveis** valores de **N**?

B)
 $0,16$

A) 7 B) 4 C) 5 D) 6

C)
 $0,4^{110}$

04. (UNESP–2009) Seja **n** um número natural de 3 algarismos. D) 0,4

Se ao multiplicar-se **n** por 7 obtém-se um número

terminado em 373, é **CoRReTo** afirmar que **04.** (UERJ) Ao analisar as notas fiscais de uma firma, o auditor

deparou-se com a seguinte situação.

A) **n** é par.

B) o produto dos algarismos de n é par. **Quantidade preço Mercadorias Total unitário**

C) a soma dos algarismos de n é divisível por 2. Cetim 21,00
*Metros *56,00

D) n é divisível por 3. Não era possível ver o número de metros vendidos, mas

sabia-se que era um número inteiro. No valor total, só

E) o produto dos algarismos de n é primo.

apareciam os dois últimos dos três algarismos da parte

05. inteira. Com as informações anteriores, o auditor concluiu (PUC Minas) Na maquete de uma casa, feita na

escala 1:500, uma sala tem 8 mm de largura, 10 mm de que a quantidade de cetim, em metros, declarada nessa

comprimento e 8 mm de altura. A capacidade, em litros, nota foi

dessa sala é A) 16 B) 26 C) 36 D) 46

A) 640

05. Considere um inteiro x e um inteiro y , este com dois

B) 6 400

algarismos. Justapondo-se o número y à direita do

C) 800 número x , encontramos um valor que excede x em

D) 8 000 248 unidades. Determine a soma $x + y$.

E) 80 000 A) 52 B) 64 C) 128 D) 58 E) 68

Editora Bernoulli **5**

Frente A Módulo 03

06. (Cesgranrio) Considere os números inteiros abc e bac , **10.** (FGV-SP-2010) Sejam x e y a soma e o produto,

em que a , b e c são algarismos distintos e diferentes respectivamente, dos dígitos de um número natural.

de zero, e $a > b$. A diferença $abc - bac$ será sempre um Por exemplo, se o número é 142, então $x = 7$ e $y = 8$.

múltiplo de Sabendo-se que N é um número natural de dois dígitos

A) 4 tal que $N = x + y$, o dígito da unidade de N é

B) 8 A) 2 B) 3 C) 6 D) 8 E) 9

C) 9

11. (UEL-PR) Seja o número XYZ , no qual X é o algarismo

D) 12

das centenas, Y , o das dezenas e Z , o das unidades.

E) 20 Invertendo-se a ordem dos algarismos, obtém-se o número

07. (Fatec-SP) Um número natural A , de dois algarismos, algarismos é 15 e o produto dos algarismos extremos é 8, ZYX , que excede XYZ em 198 unidades. Se a soma dos três

é tal que, se invertermos a ordem desses algarismos,

então o número XYZ está compreendido entre

obteremos um número 18 unidades maior. Se a soma

dos algarismos de A é 10, então o algarismo das dezenas A) 250 e 300

de A é B) 300 e 350

A) 3 C) 400 e 450

B) 4 D) 500 e 550

C) 5 E) 550 e 600

D) 6

E) 7 **12.** (FUVEST-SP) Um número inteiro positivo n de 4 algarismos

decimais satisfaz às seguintes condições.

08. (FUVEST-SP-2006) Um número natural N tem três I. A soma dos quadrados dos 1º e 4º algarismos é 58.

algarismos. Quando dele subtraímos 396, resulta II. A soma dos quadrados dos 2º e 3º algarismos é 52.

o número que é obtido invertendo-se a ordem dos

III. Se desse número n subtrairmos o número 3 816,

algarismos de N . Se, além disso, a soma do algarismo obteremos um número formado pelos mesmos

das centenas e do algarismo das unidades de N é igual algarismos do número n , mas na ordem contrária.

a 8, então o algarismo das centenas de N é

Qual
é
esse
número?

A) 4

B) 5 **13.** (UEG-GO-2007) Paulo disse a Maria que iria descobrir

o seu número de telefone. Pediu-lhe que, em segredo,

C) 6

multiplicasse o número constituído pelos quatro primeiros

D) 7 algarismos de seu telefone por 40 e a esse produto

E) 8 adicionasse 1. Pediu-lhe, então, que multiplicasse

o número obtido por 250 e, em seguida, somasse

09. (CEFET-MG–2009) O número $ab2$, em que a é o algarismo o resultado disso ao número formado pelos quatro

das centenas e b , o das dezenas, ao ser multiplicado por 8, últimos algarismos de seu telefone. Paulo afirmou que

obtem-se o número $53ba$, em que b é o algarismo o número do telefone seria este resultado. Infelizmente,

das dezenas e a é o das unidades. Assim, a diferença o número estava errado, pois para obter o número correto

$(a - b)$ vale

deveria subtrair certa quantidade deste resultado. Esta

A) -2 quantidade é

B) -1 A) 350

C) 1 B) 250

D) 2 C) 150

E) 3 D) 100

6 Coleção Estudo

Sistemas métricos e base decimal

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2009) Um dos diversos instrumentos que o homem concebeu para medir o tempo foi a ampulheta, também conhecida

como relógio de areia. Suponha que uma cozinheira tenha de

marcar 11 minutos, que é o tempo exato para assar os biscoitos

que ela colocou no forno. Dispondo de duas ampulhetas, uma de 8 minutos e outra de 5, ela elaborou 6 etapas, mas fez o

esquema, representado a seguir, somente até a 4ª etapa, pois é só depois dessa etapa que ela começa a contar os 11 minutos.

1ª etapa 2ª etapa 3ª etapa 4ª etapa 5ª etapa 6ª etapa

8 min 5 min ? ? 3 min 3 min 5 min 2 min 8 min

5 min 5 min 5 min 3 min

A opção que completa o esquema é

A) D) **5ª etapa 6ª etapa 5ª etapa 6ª etapa**

8 min 8 min 8 min 5 min 5 min 8 min 5 min 2 min 6 min

B) E) **5ª etapa 6ª etapa 5ª etapa 6ª etapa**

8 min 5 min 8 min 2 min

8 min 5 min 5 min 8 min

3 min

C) **5ª etapa 6ª etapa**

3 min 8 min

8 min 5 min

2 min

02. (Enem–2009)

Técnicos concluem mapeamento do

Aquífero Guarani

O Aquífero Guarani localiza-se no subterrâneo dos territórios da Argentina, Brasil, Paraguai e Uruguai, com extensão total

de 1 200 000 quilômetros quadrados, dos quais 840 000 quilômetros quadrados estão no Brasil. O Aquífero armazena cerca

de 30 mil quilômetros cúbicos de água e é considerado um dos maiores do mundo. Na maioria das vezes em que são feitas

referências à água, são usadas as unidades metro cúbico e litro, e não as unidades já descritas. A Companhia de Saneamento

Básico do Estado de São Paulo (SABESP) divulgou, por exemplo, um novo reservatório cuja capacidade de armazenagem é

de 20 milhões de litros.

Disponível em: .

Acesso em: 10 jul. 2009 (Adaptação).

Comparando as capacidades do Aquífero Guarani e desse novo reservatório da SABESP, a capacidade do Aquífero Guarani é

A) $1,5 \times 10^2$ vezes a capacidade do reservatório novo.

B) $1,5 \times 10^3$ vezes a capacidade do reservatório novo.

C) $1,5 \times 10^6$ vezes a capacidade do reservatório novo.

D) $1,5 \times 10^8$ vezes a capacidade do reservatório novo.

E) $1,5 \times 10^9$ vezes a capacidade do reservatório novo.

Editora Bernoulli **7**

Frente A Módulo 03

03. (Enem–2009) Os calendários usados pelos diferentes povos da Terra são muito variados. O calendário islâmico, é tão grande que seria possível colocá-los uns dentro dos

05. (Enem–2010) A disparidade de volume entre os planetas

por exemplo, é lunar, e nele cada mês tem sincronia outros. O planeta Mercúrio é o menor de todos. Marte é o

com a fase da Lua. O calendário maia segue o ciclo de segundo menor: dentro dele cabem três Mercúrios. Terra é

Vênus, com cerca de 584 dias, e cada 5 ciclos de Vênus o único com vida: dentro dela cabem sete Martes. Netuno

corresponde a 8 anos de 365 dias da Terra. é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras. Júpiter é

MATSUURA, Oscar. Calendários e o fluxo do tempo. *Scientific* o maior dos planetas: dentro dele cabem 23 Netunos.

American Brasil. Disponível em: <<http://www.uol.com.br>>. VEJA. Ano 41, n°. 26, 25 jun. 2008 (Adaptação).

Acesso em: 14 out. 2008 (Adaptação).

Seguindo o raciocínio proposto, quantas Terras cabem

Quantos ciclos teria, em Vênus, um período terrestre dentro de Júpiter?

de 48 anos? A) 406 C) 4 002 E) 28 014

A) 30 ciclos B) 1 334 D) 9 338

B) 40 ciclos

06. (Enem–2010) No monte de Cerro Armazones, no deserto

C) 73 ciclos

de Atacama, no Chile, ficará o maior telescópio da

D) 240 ciclos superfície terrestre, o Telescópio Europeu
Extremamente

E) 384 ciclos Grande (E-ELT). O E-ELT terá um espelho primário de

42 m de diâmetro, “o maior olho do mundo voltado para

04. o céu”. (Enem–2008)

Disponível em <http://www.estadao.com.br>.

A contagem de bois

Acesso em: 27 abr. 2010 (Adaptação).

Em cada parada ou pouso, para jantar ou dormir, os bois

são contados, tanto na chegada quanto na saída. Nesses Ao ler esse texto em uma sala de aula, uma professora fez

lugares, há sempre um potreiro, ou seja, determinada uma suposição de que o diâmetro do olho humano mede

área de pasto cercada de arame, ou mangueira, quando aproximadamente 2,1 cm. Qual a razão entre o diâmetro

a cerca é de madeira. Na porteira de entrada do potreiro, aproximado do olho humano, suposto pela professora,

rente à cerca, os peões formam a seringa ou funil, e o diâmetro do espelho primário do telescópio citado?

para afinar a fila, e então os bois vão entrando aos A) 1:20 C) 1:200
E) 1:2 000

poucos na área cercada. Do lado interno, o condutor B) 1:100 D) 1:1 000

vai contando; em frente a ele, está o marcador, peão

que marca as reses. O condutor conta 50 cabeças e

grita: — Talha! O marcador, com o auxílio dos dedos das

GABARITO

mãos, vai marcando as talhas. Cada dedo da mão direita

corresponde a 1 talha, e da mão esquerda, a 5 talhas. Fixação Quando entra o último boi, o marcador diz: — Vinte e

cinco talhas! E o condutor completa: — E dezoito cabeças.

01. C 02. C 03. B 04. D 05. E

Isso significa 1 268 bois.

O ESTADO DE S. PAULO. Boiada, comitivas e seus peões,

Propostos

ano VI, ed. 63, 21 dez. 1952 (Adaptação).

01. D 05. A 09. B 13. B

Para contar os 1 268 bois de acordo com o processo

02. C 06. C 10. E

descrito anteriormente, o marcador utilizou

03. A 07. B 11. A

A) 20 vezes todos os dedos da mão esquerda.

04. C 08. C 12. 7 463

B) 20 vezes todos os dedos da mão direita.

C) todos os dedos da mão direita apenas uma vez. **Seção**

Enem

D) todos os dedos da mão esquerda apenas uma vez. 01. C 03. A 05.
B

E) 5 vezes todos os dedos da mão esquerda e 5 vezes 02. E 04. D 06.
E

todos os dedos da mão direita.

8 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE
Médias 04 A

MÉDIA ARITMÉTICA

2º) José investiu um capital C na bolsa há 3 anos. No primeiro ano, ele obteve um rendimento de 27%,

A média aritmética dos números reais $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ no segundo ano, o rendimento caiu para 12% e,

x_3 no terceiro ano, ocorreu um prejuízo de 8%. Qual foi

definida por:

o rendimento médio anual?



$A = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ O montante obtido por José ao final dos três anos é dado $M = 1,27 \cdot C + 1,12 \cdot (1,27 \cdot C) + (1 - 0,08) \cdot (1,12 \cdot (1,27 \cdot C))$

por $M = 1,27 \cdot C + 1,12 \cdot (1,27 \cdot C) + (1 - 0,08) \cdot (1,12 \cdot (1,27 \cdot C))$. Desejamos encontrar uma

taxa média i tal que $M = (1 + i)^3 C$. Logo, temos:

exemplos $(1 + i)^3 C = 1,27 \cdot C + 1,12 \cdot (1,27 \cdot C) + (1 - 0,08) \cdot (1,12 \cdot (1,27 \cdot C)) \Rightarrow (1 + i)^3 = 1,27 + 1,12 \cdot 1,27 + (1 - 0,08) \cdot 1,12 \cdot 1,27$
 Calcular a média aritmética dos números $1,27, 1,12 \cdot 1,27, e (1 - 0,08) \cdot 1,12 \cdot 1,27$
 $(1 + i)^3 = 1,27 + 1,12 \cdot 1,27 + (1 - 0,08) \cdot 1,12 \cdot 1,27 \Rightarrow 1 + i = \sqrt[3]{1,27 + 1,12 \cdot 1,27 + (1 - 0,08) \cdot 1,12 \cdot 1,27}$

$A = \frac{1,27 + 1,12 \cdot 1,27 + (1 - 0,08) \cdot 1,12 \cdot 1,27}{3} = \frac{1,27 + 1,12 \cdot 1,27 + (1 - 0,08) \cdot 1,12 \cdot 1,27}{3}$
 $1 + i = \sqrt[3]{1,27 + 1,12 \cdot 1,27 + (1 - 0,08) \cdot 1,12 \cdot 1,27}$ Observe que $(1 + i)$ é a média geométrica dos números $1,27, 1,12 \cdot 1,27, e (1 - 0,08) \cdot 1,12 \cdot 1,27$

9 ... 189 3 1,27, 1,12 e 0,92. Essa média é dada por $\sqrt[3]{1,308608}$,

2º) (FUVEST-SP) O número de gols marcados nos 6 jogos que é, aproximadamente, 1,0938. Logo, o rendimento

da primeira rodada de um campeonato de futebol foi médio anual é, aproximadamente, 9,38%.

5, 3, 1, 4, 0 e 2. Na segunda rodada, serão realizados **MÉDIA HARMÔNICA** mais 5 jogos. Qual deve ser o número total de gols marcados nessa rodada para que a média de gols, nas duas rodadas, seja 20% superior à média obtida. Dados os números reais não nulos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, a média harmônica desses números é definida por:

A média aritmética da primeira rodada foi de $nH = \frac{5 + 3 + 1 + 4 + 0 + 2}{6} = \frac{15}{6} = 2,5$ gols por jogo. A média harmônica da rodada seguinte é 20% superior, ou seja, é de

5 exemplos $5, 6, \dots, 12 = 3$ gols por jogo. Como serão realizadas 225 1º) Calcular a média harmônica dos números 15 e 5. 11 partidas, teremos um total de 33 gols. Porém,

na primeira rodada, já foram feitos 15 gols.

Portanto, $2 \times 15 = 30$ gols. Na segunda rodada, o número de gols marcados é 18. $18 + 30 = 48$

MÉDIA GEOMÉTRICA 2º) João está fazendo uma viagem. Na primeira metade

da viagem, sua velocidade média é 80 km/h.

Na segunda metade da viagem, sua velocidade média

A média geométrica dos números reais positivos $x_1, x_2, \dots, x_n$ aumentou para 120 km/h. Qual a velocidade média

$x_1, x_2, \dots, x_n$ é definida por: no total do percurso?

A velocidade média v é dada pela média harmônica



$G =$ das velocidades nas duas metades da viagem.

Assim: $\frac{1}{v} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$



exemplos $v = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 240}{1 + 1 + 5 + 5} = 96$ km/h
 $\frac{1}{v} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{240} \right)$



1º) Calcular a média geométrica dos números 90, 75 e 4.

Portanto, a velocidade média ao longo de toda a

$G = \sqrt[3]{90 \cdot 75 \cdot 4} = \sqrt[3]{27\,000} = 30$ viagem foi de 96 km/h.

Editora Bernoulli 9

Frente A Módulo 04

PROPRIEDADE EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Dados $a, b \in \mathbb{R}^*$, com $a + b \geq 2ab$, valem as seguintes 01.
(UFJF-MG-2008) Uma empresa com 20 funcionários torna

desigualdades: públicos os salários de seus funcionários, ocultando o

$b^2 + a^2 \leq (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ N° de salário de seu diretor, conforme a tabela a seguir:

1 1 2 Função salário funcionários + a b
Auxiliar R\$ 1 000,00 10

Essa propriedade também é verificada para três ou mais Secretária R\$ 1 500,00 5

números reais positivos. As médias estão no intervalo que Consultor R\$ 2 000,00 4 vai do menor até o maior número tomado. Quando elas são Diretor * 1

diferentes, a maior entre elas é a aritmética, e a menor, A empresa promoveu um aumento salarial de 10% sobre

a harmônica. os valores da tabela para todas as funções. Foi divulgado

que a nova média salarial da empresa passou a ser de

MÉDIA PONDERADA R\$ 1 952,50. Qual é o novo salário de diretor? A) R\$ 2 500,00 D) R\$ 11 000,00

A média ponderada dos números reais positivos B) R\$ 4 500,00 E) R\$ 25 500,00

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ com pesos $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ (também C)
R\$ 10 000,00 1 2 3 n 1 2 3 n

números reais positivos), respectivamente, é definida por: **02.** (UFMG) Um carro, que pode utilizar como combustível



$P = x$ m álcool e gasolina misturados em qualquer proporção, $+ x$ m $+ x$ m $+ + x$ m $1122333 \square_{nn}$ é abastecido com 20 litros de gasolina e 10 litros de m m m $1 + 2 + 3 + \square + n$ álcool. Sabe-se que o preço do litro de gasolina e o do



litro de álcool são, respectivamente, R\$ 1,80 e R\$ 1,20.

exemplos Nessa situação, o preço médio do litro do combustível

que
foi
utilizado
é
de

1º) Calcular a média ponderada dos números 15, 20 e

40 com pesos 6, 3 e 1, respectivamente. A) R\$ 1,50.
C) R\$ 1,60.

$M = 15 \cdot 6 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 90 + 60 + 40 = 190$
 $19 =$ B) R\$ 1,55. D) R\$ 1,40.

$6 \cdot 3 + 1 + 10 \cdot 10$ **03.** $= =$

(PUC-Campinas-SP) A análise do biotipo de cada um dos atletas que integraram a delegação brasileira na

2º) No processo seletivo de uma empresa, os

última Olimpíada permitiu que se calculasse, certo dia, candidatos são submetidos a testes de Português

a média de pesos das 122 mulheres participantes: 62 kg.

e Matemática, além de uma entrevista. A cada Supondo-se que uma dessas atletas fosse excluída do

um desses é atribuída uma nota que varia de zero grupo, a média de pesos das 121 restantes passaria a

a dez. Porém, a entrevista tem peso três vezes ser 61,9 kg. Nessas condições, o peso, em quilogramas,

maior que os testes de Matemática e Português. da atleta excluída seria A nota fi nal do candidato é a média das notas de cada A) 75,5 C) 74,6 E) 73,8 etapa, considerando-se o peso de cada uma delas. B) 75,2 D) 74,1 Essa empresa só seleciona candidatos que obtiverem

uma nota fi nal igual ou superior a oito. Maria obteve **04.** (UEL-PR) Um automóvel subiu uma ladeira a uma

nota 6 no teste de Português e 7 em Matemática. velocidade média de 60 km/h e, em seguida, desceu

Qual é a nota mínima que ela deve obter na entrevista a mesma ladeira à velocidade média de 100 km/h.

A velocidade média desse veículo no percurso inteiro foi de para ser selecionada?

A) 72 km/h. D) 80 km/h.

Considere que as notas no teste de Português, no de B) 75 km/h. E) 84 km/h. Matemática e na entrevista sejam, respectivamente, C) 78 km/h.

$n_1, n_2, \dots, n_n$. Dessa forma, a nota final N de um p_{me}

05. (UFG–2007) A média das notas dos alunos de um candidato é dada por: professor é igual a 5,5. Ele observou que 60% dos alunos $N = n_1 + n_2 + 3n_3$ obtiveram nota de 5,5 a 10 e que a média das notas p_{me}

$\frac{1}{3}$ desse grupo de alunos foi 6,5. Nesse caso, considerando $n_1 + n_2 +$

o grupo de alunos que tiveram notas inferiores a 5,5,

Assim, para Maria obter nota 8, devemos ter: a média de suas notas foi de

$$\frac{6}{7} \cdot 3 + \frac{1}{7} \cdot n = 5,5 \Rightarrow 3n = 40 \Rightarrow n = \frac{40}{3} \approx 13,33$$

A) 2,5 C) 3,5 E) 4,5

$$\frac{6}{7} \cdot 3 + \frac{1}{7} \cdot n = 5,5 \Rightarrow 3n = 40 \Rightarrow n = \frac{40}{3} \approx 13,33$$

= 9 $\Rightarrow$ = 27 $\Rightarrow$ $n = 5$ B) 3,0 D) 4,0

10 Coleção Estudo

Médias

EXERCÍCIOS PROPOSTOS **06.** (UFMG) No início de uma partida de futebol, a altura média dos 11 jogadores de um dos times era 1,72 m.

01. Ainda no primeiro tempo, um desses jogadores, com

(PUC Minas–2007) De acordo com os dados de uma 1,77 m de altura, foi substituído. Em seu lugar, entrou um

pesquisa, os brasileiros de 12 a 17 anos navegam em outro que media 1,68 m de altura. No segundo tempo,

média 42 minutos em cada acesso à Internet, ao passo outro jogador do mesmo time, com 1,73 m de altura,

que, na França, o tempo médio de navegação dos jovens é foi expulso. Ao terminar a partida, a altura média dos

25% a menos que no Brasil e, nos Estados Unidos, é 20% 10 jogadores desse time era

a menos que na França. Com base nesses dados, pode-se A) 1,69 m. C) 1,71 m.

estimar que a média aritmética dos tempos de navegação,

B) 1,70 m. D) 1,72 m.

por acesso, nesses três países, em minutos, é igual a

A) 30,6 C) 34,3 **07.** (UFMG–2006) Os 40 alunos de uma turma fizeram uma

B) 32,9 D) 36,4 prova de Matemática valendo 100 pontos. A nota média

da turma foi de 70 pontos e apenas 15 dos alunos

02. (FUVEST-SP) Numa classe de um colégio, existem conseguiram a nota máxima. Seja **M** a nota média

estudantes de ambos os sexos. Numa prova, as médias dos alunos que não obtiveram a nota máxima. Então,

aritméticas das notas dos meninos e das meninas foram, é **CoRReTo** afirmar que o valor de **M** é

respectivamente, iguais a 6,2 e 7,0. A média aritmética A) 53 B) 50 C) 51 D) 52

das notas de toda a classe foi igual a 6,5.

A) A maior parte dos estudantes dessa classe é composta **08.**
(FUVEST-SP) Uma prova continha cinco questões, cada uma

de meninos ou meninas? **JUsTiFiQue** sua resposta. valendo 2 pontos.
Em sua correção, foram atribuídas a cada

B) Que porcentagem do total de alunos da classe é do questão
apenas as notas 0 ou 2, caso a resposta estivesse,

sexo masculino? respectivamente, errada ou certa. A soma dos pontos
obtidos em cada questão forneceu a nota da prova de cada

03. aluno. Ao final da correção, produziu-se a seguinte tabela,
(FUVEST-SP) Sabe-se que a média aritmética de

5 números inteiros distintos, estritamente positivos, é 16. contendo
a porcentagem de acertos em cada questão.

O **MAioR** valor que um desses inteiros pode assumir é

MATEMÁTICA

Questão 1 2 3 4 5

A) 16 D) 70

B) 20 E) 100 % **de acerto** 30% 10% 60% 80% 40%

C) 50

Logo, a média das notas da prova foi

04. A) 3,8 B) 4,0 C) 4,2 D) 4,4 E) 4,6 (PUC-Campinas-SP) Sabe-se que
os números x e y

fazem parte de um conjunto de 100 números cuja média

aritmética é 9,83. Retirando-se x e y desse conjunto, **09.**
(UNIFESP) Para ser aprovado num curso, um estudante

precisa submeter-se a três provas parciais durante o

a média aritmética dos números restantes será 8,5.

período letivo e a uma prova final, com pesos 1, 1, 2 e 3,

Se $3x - 2y = 125$, então

respectivamente, e obter média no mínimo igual a 7.

A) $x = 75$ D) $y = 65$

Se um estudante obteve nas provas parciais as notas

B) $y = 55$ E) $x = 95$ 5, 7 e 5, respectivamente, a nota **MíNiMA** que necessita

C) $x = 80$ obter na prova final para ser aprovado é

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

05. (UERJ) Seis caixas-d'água cilíndricas iguais estão

assentadas no mesmo piso plano e ligadas por registros **10.** (UFPE) Uma pesquisa sobre o consumo de bebida alcoólica

R situados nas suas bases, como sugere a figura a seguir: de um grupo de 20 estudantes, em um período de 30 dias,

produziu o seguinte resultado.

R Número de unidades Número de estudantes R R R R T de bebida
alcoólica que consumiram T T T T

8 dm 3 dm 5 dm 10 dm 9 dm 7 dm 0 a 10 12

Após a abertura de todos os registros, as caixas ficaram De 11 a 20 8
com os níveis de água no mesmo plano. A altura desses Acima de 20
0

níveis, em dm, equivale a

Qual o valor máximo que a média do número de unidades

- A) 6,0 C) 7,0 alcoólicas consumidas pelos estudantes no período
- B) 6,5 D) 7,5 pode atingir?

Editora Bernoulli 11

Frente A Módulo 04

11. (FUVEST-SP) A distribuição das idades dos alunos de uma **14.** (FUVEST-SP) Para que fosse feito um levantamento sobre

classe é dada pelo gráfico adiante. Qual das alternativas o número de infrações de trânsito, foram escolhidos

representa **Melhor** a média de idades dos alunos? 50 motoristas. O número de infrações cometidas por

esses motoristas, nos últimos cinco anos, produziu a

23 seguinte tabela.

s 20 **Número de infrações** **Número de motoristas**

De 1 a 3 7

10 De 4 a 6 10

De 7 a 9 15

Número de aluno 5 De 10 a 12 13 2

16 17 18 19 20 Idade De 13 a 15 5

(anos)

Maior ou igual a 16 0

A) 16 anos e 10 meses

Pode-se, então, afirmar que a média do número de

B) 17 anos e 1 mês infrações, por motorista, nos últimos cinco anos, para

C) 17 anos e 5 meses esse grupo, está entre

D) 18 anos e 6 meses A) 6,9 e 9,0 C) 7,5 e 9,6 E) 8,1 e 10,2

E) 19 anos e 2 meses B) 7,2 e 9,3 D) 7,8 e 9,9

12. (UFMG) Define-se a média aritmética de n números representa as notas obtidas em uma questão pelos 32 000 **15.** (Unicamp-SP) O gráfico a seguir, em forma de *pizza*,

dados como o resultado da divisão por n da soma dos n candidatos presentes à primeira fase de uma prova de

números dados. Sabe-se que 3,6 é a média aritmética vestibular. Ele mostra, por exemplo, que 32% desses

de 2,7; 1,4; 5,2 e x . O número x é igual a candidatos tiveram nota 2 nessa questão.

A) 2,325 4 (12%) 3 (16%)

B) 3,1 5 (10%)

C) 3,6

D) 5,1 0 (10%)

13. (VUNESP) O gráfico representa, em milhares de 1 (20%)

toneladas, a produção no estado de São Paulo de

Pergunta
se:

um determinado produto agrícola entre os anos de

A) Quantos candidatos tiveram nota 3?

1990 e 1998.

B) É possível afirmar que a nota média, nessa questão, foi < 2 ? **JUsTiFiQue** sua resposta.

70

60 16. (FCC-SP) A média aritmética de 11 números é 45. Se o número 8 for retirado do conjunto, a média aritmética

dos números restantes será 30 A) 48,7 C) 47,5 E) 41,5 20 B) 48 D) 42 10

0 ano 17. (PUC-SP) A média aritmética de 100 números é igual

90 91 92 93 94 95 96 97 98 a 40,19. Retirando-se um desses números, a média

aritmética dos 99 números restantes passará a ser 40,5.

Analisando o gráfico, observa-se que a produção

O número retirado equivale a

A) foi crescente entre 1992 e 1995. A) 9,5%. C) 95%. E) 950%.

B) teve média de 40 mil toneladas ao ano. B) 75%. D) 765%.

C) em 1993 teve acréscimo de 30% em relação ao

ano anterior. **18.** (Unicamp-SP) A média aritmética das idades de um grupo de

120 pessoas é de 40 anos. Se a média aritmética das idades

D) a partir de 1995 foi decrescente.

das mulheres é de 35 anos e a dos homens é de 50 anos,

E) teve média de 50 mil toneladas ao ano. qual o número de pessoas de cada sexo no grupo?

12 Coleção Estudo

Médias

19. (FUVEST-SP) Numa classe com vinte alunos, as notas do **02.** (Enem-1999) Um sistema de radar é programado para

exame final podiam variar de 0 a 100 e a nota mínima registrar automaticamente a velocidade de todos os veículos

para aprovação era 70. Realizado o exame, verificou-se trafegando por uma avenida, onde passam em média

que oito alunos foram reprovados. A média aritmética das 300 veículos por hora, sendo 55 km/h a máxima velocidade

notas desses oito alunos foi 65, enquanto que a média permitida. Um levantamento estatístico dos registros do

dos aprovados foi 77. Após a divulgação dos resultados, radar permitiu a elaboração da distribuição percentual de

o professor verificou que uma questão havia sido mal veículos de acordo com sua velocidade aproximada.

formulada e decidiu atribuir 5 pontos a mais para todos 45 40 40 os alunos. Com essa decisão, a média dos aprovados 35 30 passou a ser 80 e a dos reprovados, 68,8. 30

A) **Calcule** a média aritmética das notas da classe toda 20 25 antes da atribuição dos cinco pontos extras. ículos (%) 15 15 Ve 10 6

B) Com a atribuição dos cinco pontos extras, quantos 5 5 3 1 alunos, inicialmente reprovados, atingiram nota para 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 aprovação?

Velocidade (km/h)

SEÇÃO ENEM A velocidade média dos veículos que trafegam nessa avenida é de

01. (Enem–2009) Nos últimos anos, o aumento da população, A) 35 km/h.

aliado ao crescente consumo de água, tem gerado

B) 44 km/h.

inúmeras preocupações, incluindo o uso desta na

C)
55
km/
h.

produção de alimentos. O gráfico mostra a quantidade

de litros de água necessária para a produção de 1 kg de D) 76 km/h.

alguns alimentos. E) 85 km/h.

18 000 03. (Enem–2009) A tabela mostra alguns dados da emissão de

17 000

16 000 dióxido de carbono de uma fábrica em função do número

MATEMÁTICA

15 000 de toneladas produzidas.

14 000

13 000 emissão de dióxido

produção

11 000 (em toneladas) 12 000 de carbono (em partes por

milhão – p.p.m.)

10 000

1,1 2,14

9 000

8 000 1,2 2,30

Litros de água 7 000 1,3 2,46

6 000

5 000 1,4 2,64

4 000 1,5 2,83

3 000 1,6 3,03

2 000

1 000 1,7 3,25

0 i z 1,8 3,48 Arroz soja igo porco Carne de bo MilhoTr 1,9
3,73 Banana

Legumes Óleo de 2,0 Carne de 4,00

Alimentos (1 kg) Cadernos do Gestar II. Matemática TP3.

Com base no gráfico, para a produção de 100 kg de Disponível em: .
Acesso em: 14 jul. 2009.

milho, 100 kg de trigo, 100 kg de arroz, 100 kg de

carne de porco e 600 kg de carne de boi, a quantidade Os dados na
tabela indicam que a taxa média de variação

média necessária de água, por quilograma de alimento entre a emissão de dióxido de carbono (em p.p.m.) e a

produzido, é aproximadamente igual a produção (em toneladas) é

A) 415 litros por quilograma. A) inferior a 0,18.

B) 11 200 litros por quilograma. B) superior a 0,18 e inferior a 0,50.

C) 27 000 litros por quilograma. C) superior a 0,50 e inferior a 1,50.

D) 2 240 000 litros por quilograma. D) superior a 1,50 e inferior a 2,80.

E) 2 700 000 litros por quilograma. E) superior a 2,80.

Editora Bernoulli 13

Frente A Módulo 04

04. (Enem–2009) Brasil e França têm relações comerciais há **06.**
(Enem–2005) Um pátio de grandes dimensões será

mais de 200 anos. Enquanto a França é a 5ª nação mais revestido por pastilhas quadradas brancas e pretas,

rica do planeta, o Brasil é a 10ª, e ambas se destacam segundo o padrão representado a seguir, que será

na economia mundial. No entanto, devido a uma série repetido em toda a extensão do pátio.

de restrições, o comércio entre esses dois países ainda

não é adequadamente explorado, como mostra a tabela

seguinte, referente ao período 2003-2007.

investimentos bilaterais

(em milhões de dólares)

As pastilhas de cor branca custam R\$ 8,00 por metro

2004 357 485

quadrado e as de cor preta, R\$ 10,00. O custo por metro

2005 354 1 458 quadrado do revestimento será de

2006 539 744 A) R\$ 8,20. C) R\$ 8,60. E) R\$ 9,00.

2007 280 1 214 B) R\$ 8,40. D) R\$ 8,80.

Disponível em: .

Acesso em: 7 jul. 2009. **GABARITO**

Os dados da tabela mostram que, no período considerado,

**os valores médios dos
investimentos da França no Brasil
Fixação** foram maiores que os investimentos do Brasil na
França

em um valor 01. D 02. C 03. D 04. B 05. D

A) inferior a 300 milhões de dólares. **Propostos**

B) superior a 300 milhões de dólares, mas inferior a

400 milhões de dólares. 01. B

C) superior a 400 milhões de dólares, mas inferior a 02. A) O

número de meninos é maior do que o número de meninas, já que a média da turma 500 milhões de dólares. se encontra mais próxima da média masculina.

D) superior a 500 milhões de dólares, mas inferior a B) 62,5%

600 milhões de dólares.

03.

D

E) superior a 600 milhões de dólares.

04.

D

05. 05. C (Enem–2010) Em sete de abril de 2004, um jornal

publicou o *ranking* de desmatamento, conforme gráfico, 06. C

da chamada Amazônia Legal, integrada por nove estados. 07. D

Ranking do desmatamento em Km

2 08. D

09.

A

9º Amapá 4 10. 14

8º Tocantins 136

7º Roraima 326 11. C

6º Acre 549 12. D

4º Amazonas 13. E 797 5º Maranhão 766

3º Rondônia 3 463 14. A

2º Pará 7 293 15. A) 5 120 candidatos

1º Mato Grosso 10 416

B) Não. A nota média é igual a 2,30.

Considerando-se que até 2009 o desmatamento cresceu 18. 80
mulheres e 40 homens

10,5% em relação aos dados de 2004, o desmatamento

19.
A)
72,2

médio por estado em 2009 está entre

B)
3

A) 100 km² e 900 km². Seção
Enem B) 1 000 km² e 2 700 km².

C) 2 800 km² e 3 200 km². 01. B 03. D 05. C

D) 3 300 km² e 4 000 km². 02. B 04. D 06. B

E) 4 100 km² e 5 800 km².

14 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Equações e problemas 03 B

INTRODUÇÃO exemplo $\{ 4x \mid = - \{ 3x +$
 $= 403 \mid$ Estudaremos, neste módulo, alguns métodos
de resolução $\mid$ ou $\mid \mid$ ou de equações e de sistemas de

equações. Resolver uma $(3x + 4)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \{x - 1 = 0 \vee x - 1 = 0\}$ = equação signifi ca determinar suas raízes, ou seja, os valores -1 e 1 que tornam a sentença verdadeira. O conjunto formado por $\{x \mid x - 1 = 0\}$ todas as raízes da equação é denominado conjunto verdade ou conjunto solução. $\{1\}$

Portanto,
 $S = \{1\}$.

Por exemplo, 7 é raiz da equação $2x + 1 = 15$, pois

$2 \cdot 7 + 1 = 15$ é uma sentença verdadeira.

EQUAÇÕES DO 2º GRAU

EQUAÇÃO DO 1º GRAU Chamamos de equação do 2º grau a toda sentença que

pode ser reduzida a $ax^2 + bx + c = 0$, em que **a**, **b** e **c** são coeficientes e $a \neq 0$.

Chamamos de equação do 1º grau a toda sentença A resolução desse tipo de equação é dada pela Fórmula

da forma $ax + b = 0$, em que **a** e **b** são os coeficientes de Bhaskara: e $a \neq 0$.

Dessa forma, temos que: $ax^2 - b_2 \pm \Delta + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, em que $D = b^2 - 4ac$

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Demonstr

a

O conjunto solução é, então, $S = \{ ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = -c \mid \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \}$. Multiplicando os dois membros desta última igualdade por a

por $4a$,
tem-se:

EQUAÇÕES TIPO PRODUTO OU $ax^2 + bx = -c \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

Somando, agora, b^2 aos dois membros da igualdade,

QUOCIENTE NULO obtém-se:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Para resolvermos uma equação do tipo $a \cdot b = 0$, lembremos Para $D = b^2 - 4ac \geq 0$, tem-se:

que, se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

$$(2ax + b)^2 = D \Leftrightarrow 2ax + b = \pm \Delta \Leftrightarrow$$

exemplo $-b \pm \Delta$
 $2ax = -b \pm \Delta \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \Delta}{2a}$
Discussão do número de raízes
 $(2x + 1) \cdot (x - 3) = 0$
 $\Leftrightarrow 0$ ou $\Leftrightarrow 0$ ou $|x - 3| = 0$ ou $|x - 3| = 0$
 A quantidade de raízes de uma equação do 2º grau $| - = | =$

depende do valor obtido para o radicando $D = b^2 - 4ac$,

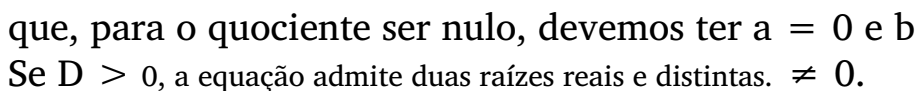
Portanto, $S = \{1\}$ chamado discriminante. $\{ - , 3 \} \cdot \{ 2 \}$



a Se $D < 0$, a equação não admite raízes reais.



Para resolvermos uma equação do tipo $= 0$, lembremos Se $D = 0$, a equação admite duas raízes reais e iguais.
 b



Frente B Módulo 03

EQUAÇÕES INCOMPLETAS

$$1^a) \text{ c} = 0 \text{ e } b \neq 0 \text{ b}_2 - (b_2 - 4ac) 4ac \text{ c x . x} \\ = 1 2 2 = 2 = 4 a 4 a a a x_2 + b x + c = 0 \Leftrightarrow a x_2 + b x \\ = 0 \Leftrightarrow$$

Portanto, o produto das raízes é dado por: $x = 0$

$$\{x(ax + b) = 0\} \Leftrightarrow \text{ou} \Leftrightarrow \{c \mid ax \neq 0 \mid + = b \cdot x = 0 \mid \text{ou } x = 0 \mid \}$$

$$\Delta = -12a \quad \text{a exemplo}$$

Portanto, $S = \{b\} \cup \{0, -\}$ Vamos determinar k a fim de que uma das raízes da equação $x^2 - 5x + (k + 3) = 0$ seja igual ao quádruplo da outra.

Logo: **exemplo**

$$\begin{aligned} 2x \quad x = 0 \quad x = 0 \quad b \quad x \quad | \quad | \quad | \quad + x = - \quad + x = 5 \quad (I)_{12} \\ \Rightarrow x \text{ ou } a_{122} \text{ ou } + 3x = 0 \Rightarrow x(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} | 2 \\ x | + = 3 \end{cases} \quad 0 \quad 3 \quad | \quad c \quad x = -x \cdot x = x \cdot x_{12} \Rightarrow = k + 3, \\ (II) \quad | \quad | \quad 2_{12} \quad a \end{aligned}$$

Portanto, $S = \{3\} \cup \{0, -\}$ Por hipótese, $x = 4x$.
(III)₁₂ $| \quad 2 \quad |$

Assim, substituindo (III) em (I):

$$\begin{aligned} 2^a) \quad b = 0 \text{ e } c \neq 0 \quad 4x + x = 5 \quad x_{22} \Rightarrow = 1 \text{ e } x \\ = 4_{21} \quad c \quad c \quad ax_2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax_2 + c = 0 \Leftrightarrow x_2 = - \\ \Leftrightarrow x = \pm - \quad \text{Daí, de (II), temos: } a \text{ a} \end{aligned}$$

Portanto, $S = \{ \} \cup \{c \mid c \mid c \mid 4.1 = k + 3 \Rightarrow k = 1 \mid \}$
 > 0 . $- \quad - \quad , \quad - \quad \}$, se $- \quad a \quad a \quad a \quad | \quad | \quad | \quad |$

c SISTEMA DE EQUAÇÕES

Se $- < 0$, então não existe raiz real, e $S = \emptyset$.

a

exemplos

A solução de um sistema de duas equações e duas

1º) $2x_2 - 8 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 4 \Rightarrow x = + - 2$
incógnitas, x e y , é qualquer par ordenado de valores
(x , y)

Portanto, $S = \{-2, 2\}$. que satisfaz a ambas equações.

2º) $2x_2 + 8 = 0 \Rightarrow 2x_2 = -8 \Rightarrow x_2 = -4 \Rightarrow$ Observe
que o par ordenado $(8, 1)$ é solução do seguinte

$x = -4 \Rightarrow x \notin$ sistema: $\square$

Portanto, $S = \emptyset$. $\{ \mid x y + = 9 \mid x y - = 7 \mid \}$

3ª) $b = 0$ e $c = 0$

$$ax_2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Métodos de resolução de sistemas

Portanto, $S = \{0\}$. Substituição

SOMA E PRODUTO DAS RAÍZES

Esse método consiste em isolar uma das incógnitas numa das equações e em substituir a expressão encontrada na

Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ em outra equação.

que $a \neq 0$, vamos calcular $x_1 + x_2$ e $x_1 \cdot x_2$. **exemplo**

i) Resolver o sistema
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

Portanto, a soma das raízes é dada por:

Pelo método da substituição, escolhemos, por exemplo,

a equação $x + y = 7$, e vamos isolar a incógnita x .
Logo:

$$x + y = 7 \Rightarrow x = 7 - y$$

$$(7 - y)^2 + y^2 = 3$$

Equações e problemas

Agora, substituindo x por $7 - y$ na equação $x - y = 3$, temos: **03.** (UFG–2007) Uma pequena empresa, especializada em

fabricar cintos e bolsas, produz mensalmente 1 200

$$x - y = 3 \Leftrightarrow 7 - y - y = 3 \Leftrightarrow -2y = -4 \Leftrightarrow y = 2$$

peças. Em um determinado mês, a produção de bolsas foi

Agora, substituindo y por 2 na equação $x + y = 7$, temos: três vezes maior que a produção de cintos. Nesse caso,

a quantidade de bolsas produzidas nesse mês foi

$$x + y = 7 \Leftrightarrow x + 2 = 7 \Leftrightarrow x = 5$$

A) 300

Portanto, $S = \{(5, 2)\}$. B) 450

C)
600

Adição D) 750

E)
900

Para resolver um sistema pelo método da adição, adicionamos membro a membro as equações de modo a **04.** (PUC Minas–2006) Três atletas, A, B e C, participam anular uma das incógnitas.

de uma prova de revezamento. Depois de percorrer

exemplo 2 2

Resolver o sistema $x + y = 8$ da prova. Em seguida, B dá lugar a C, que completa os $x + y = 7$ da prova, A é substituído por B, que percorre mais

6660 metros restantes. Com base nesses dados, a distância

Pelo método da adição, adicionamos membro a membro percorrida por esses três atletas, em quilômetros, é as duas equações.

A) 2,10

B) 2,32 $x + y = 8$ soma $x + y = 6$ C) 2,40

D) 2,64

$$2x = 14 \Leftrightarrow x = 7$$

Substituindo 7 na equação $x + y = 8$, por exemplo, temos: **05.** (UFJF-MG-2009) Uma gaveta contém somente lápis,

$7 + y = 8 \Leftrightarrow y = 1$ quantidade de canetas. Se colocarmos mais 12 canetas **MATEMÁTICA** canetas e borrachas. A quantidade de lápis é o triplo da

Portanto, $S = \{(7, 1)\}$. e retirarmos 2 borrachas, a gaveta passará a conter o

mesmo número de lápis, canetas e borrachas. Quantos

objetos havia na gaveta inicialmente?

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

A) 34

B)

44

01. (Fatec-SP-2007) João tinha **B** balas. Comeu uma e deu **C** 54 metade do que sobrou para Mário. Depois de comer mais **D** 64 uma, deu metade do que sobrou para Felipe e ainda ficou **E** 74 com 7 balas. O número **B** é tal que

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

A) $10 < B < 20$

B) $20 < B < 30$

C) $30 < B < 40$ **01.** (FUVEST-SP-2007) Os estudantes de uma classe

D) $40 < B < 50$ organizaram sua festa de final de ano, devendo cada

E) $B > 50$ um contribuir com R\$ 135,00 para as despesas.

Como 7 alunos deixaram a escola antes da arrecadação

02. (FUVEST-SP-2007) A soma e o produto das raízes da e as despesas permaneceram as mesmas, cada um dos

equação de segundo grau $(4m + 3n)x^2 - 5nx + (m - 2) = 0$ estudantes restantes teria de pagar R\$ 27,00 a mais.

valem, respectivamente, 5 3 No entanto, o diretor, para ajudar, colaborou com e . Então, $m + n$ é igual a

8 32 R\$ 630,00. Quanto pagou cada aluno participante da festa?

A) 9 A) R\$ 136,00

- B) 8 B) R\$ 138,00
 C) 7 C) R\$ 140,00
 D) 6 D) R\$ 142,00
 E) 5 E) R\$ 144,00

Editora Bernoulli 17

Frente B Módulo 03

02. (UFG–2007) Uma videolocadora classifica seus 1 000 DVDs **06.**
 (UFRJ–2006) A soma de dois números é 6, e a soma de

em lançamentos e catálogo (não lançamentos). seus quadrados é 68.
 O módulo da diferença desses dois

Em um final de semana, foram locados 260 DVDs, números é
 correspondendo a quatro quintos do total de lançamentos A) 2
 e um quinto do total de catálogo. Portanto, o número de B) 4
 DVDs de catálogo locados foi C) 6

A) 80 D) 8

B) 100 E) 10

C) 130 **07.** (PUC Rio–2006) Ache um valor de m tal que as
 duas

D) 160 soluções da equação $x(x + 1) = m(x + 2)$ sejam iguais.

E) 180

08. (UFMG) Um estudante planejou fazer uma viagem

03. (UEG–2006) Maria Helena comprou, no primeiro de férias e reservou uma certa quantia em dinheiro

domingo de junho, cinco quilos de carne e dois pacotes para o pagamento de diárias. Ele tem duas opções de

de carvão, pagando R\$ 34,60. No domingo seguinte, hospedagem: a Pousada **A**, com diária de R\$ 25,00, e a

ela retornou ao açougue e comprou apenas 3,5 quilos Pousada **B**, com diária de R\$ 30,00. Se escolher a Pousada **A**,

de carne e um pacote de carvão, pagando R\$ 23,10. em vez da Pousada **B**, ele poderá ficar três dias a mais

de férias. Nesse caso, é **CoRReTo** afirmar que, para o

Se os preços não sofreram alterações no período em

pagamento de diárias, esse estudante reservou

que Maria Helena fez as compras, o preço do quilo da

A) R\$ 300,00.

carne que ela comprou foi de

B)
R\$
600,00.

A) R\$ 5,40.

C)
R\$
350,00.

B) R\$ 5,80.

D)
R\$
450,00.

C) R\$ 6,00.

D) R\$ 6,10. **09.** (UNIFESP–2007) Em uma lanchonete, o custo de

3 sanduíches, 7 refrigerantes e uma torta de maçã é

04. R\$ 22,50. Com 4 sanduíches, 10 refrigerantes e uma (PUC Minas–2006) Em uma caixa e em uma cesta,

estavam guardadas 210 laranjas. Passando-se 8 laranjas torta de maçã, o custo vai para R\$ 30,50. O custo de

um sanduíche, um refrigerante e uma torta de maçã,

da cesta para a caixa, cada um desses recipientes ficou

em
reais,
é

com o mesmo número de laranjas. O número de laranjas

A)
7,00

que estavam guardadas na caixa, inicialmente, era

B)
6,50

A) 91

C)
6,00

B) 97

D)
5,50

C) 105 E) 5,00

D) 113

10. (UFSC–2007) Pedro, Luiz, André e João possuem,

05. (UEL-PR–2006) Marlene confecciona tapetes artesanais juntos, 90 CDs. Se tirarmos a metade dos CDs de Pedro,

de dois modelos, redondo e retangular. Num certo mês, dobrarmos

o número de CDs de Luiz, tirarmos 2 CDs

ela confeccionou 60 tapetes e teve um lucro líquido de de André e aumentarmos em 2 o número de CDs de

R\$ 500,00. Sabendo que cada tapete redondo foi vendido João, eles ficarão com a mesma quantidade de CDs.

por R\$ 10,00, cada tapete retangular por R\$ 12,00 e que
DeTeRMiNe o número inicial de CDs de André.

Marlene gastou R\$ 160,00 em materiais, quantos tapetes **11**. (UFG–2007) Para se deslocar de casa até o seu trabalho,

de cada modelo ela confeccionou nesse mês?

um trabalhador percorre 550 km por mês. Para isso, em

A) 20 redondos e 40 retangulares alguns dias, ele utiliza um automóvel e, em outros, uma

B) 30 redondos e 30 retangulares motocicleta. Considerando que o custo do quilômetro

rodado é de 21 centavos para o automóvel e de

C) 40 redondos e 20 retangulares

7 centavos para a motocicleta, **CAIcUle** quantos

D) 10 redondos e 50 retangulares quilômetros o trabalhador deve andar em cada um dos

E) 50 redondos e 10 retangulares veículos, para que o custo total mensal seja de R\$ 70,00.

12. (UFRRJ) Em uma sala de aula, entram n alunos. **17.** (FEI-SP) Uma das raízes da equação $x^2 - x - a = 0$

Se sentarem 2 alunos em cada bancada, 11 ficarão de pé. é também raiz da equação $x^2 + x - (a + 20) = 0$.

Porém, se em cada bancada sentarem 3 alunos, haverá Qual é o valor de a ?

4 bancadas vazias. O número de alunos é A) $a = 10$

A) 49 D) 71 B) $a = 20$

B) 57 E) 82 C) $a = -20$

C) 65 D) $a = 90$

E)
 a
 $=$
 -9

13. (UEL-PR) Sabe-se que os números reais a e b são raízes

da equação $x^2 - kx + 6 = 0$, na qual $k \in \square$. A equação

18. (UFMG) O quadrado da diferença entre o número natural

do 2º grau que admite as raízes $a + 1$ e $b + 1$ é

$x + 3$ é acrescido da soma de 11 e x . O resultado é, então,

A) $x^2 + (k + 2)x + (k + 7) = 0$ dividido pelo dobro de x , obtendo-se quociente 8 e resto 20.

B) $x^2 - (k + 2)x + (k + 7) = 0$ A soma dos algarismos de x é

C) $x^2 + (k + 2)x - (k + 7) = 0$ A) 3

D) $x^2 - (k + 1)x + 7 = 0$ B) 4

E) $x^2 + (k + 1)x + 7 = 0$ C) 5

14. D) 2

(Cesgranrio) Se x_1 e x_2 são as raízes de $x^2 + 57x - 228 = 0$,

então $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ vale **19**. (UFLA-MG-2007) Para que o sistema de equações

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

A) $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$

B) 1 admita apenas uma solução real, o valor de a deve ser

4 MATEMÁTICA

A)
2

C) -1 B) -5

2

C)
 -2

D) 1 D) 4

2

E) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ **20**. (UFC-2007) Os números reais não nulos p e q são tais que

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 0$ que a equação $x^2 + px + q = 0$ tem raízes D e $1 - D$,

15. sendo que D denota o discriminante dessa equação.

(PUC-Campinas-SP) Em agosto de 2000, Zuza gastou

Assinale a alternativa que corresponde ao valor de **q**.

R\$ 192,00 na compra de algumas peças de certo artigo.

No mês seguinte, o preço unitário desse artigo aumentou A) –1

R\$ 8,00 e, com a mesma quantia que gastou em agosto, 1

B)

–

ele pode comprar duas peças a menos. Em setembro, 2

o preço de cada peça de tal artigo era 1 C) A) R\$ 24,00. 4

B) R\$ 25,00. 3

D)

C) R\$ 28,00. 16

D) R\$ 30,00. 7

E)

E) R\$ 32,00. 8

16. (Unicamp-SP) Uma transportadora entrega, com caminhões, **21.**
(UFLA-MG–2007) Em uma fazenda, é necessário

60 toneladas de açúcar por dia. Devido a problemas transportar um número de sacos de cimento utilizando

operacionais, em um certo dia cada caminhão foi cavalos.
Colocando-se dois sacos de cimento em cada

carregado com 500 kg a menos que o usual, tendo sido cavalo,
sobram nove sacos, e colocando-se três sacos de

necessário, naquele dia, alugar mais 4 caminhões. cimento em cada
cavalo, três cavalos ficam sem carga

A) Quantos caminhões foram necessários naquele dia? alguma.
CALCULE o número de sacos de cimento e o

B) Quantos quilos cada caminhão transportou naquele dia? número de cavalos.

Editora Bernoulli **19**

Frente B Módulo 03

22. (UFPE–2007) Júnior compra R\$ 5,00 de bananas toda **02.**
(Enem–2009) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento

semana. Em certa semana, ele observou que o número inicial para organizar uma festa, que seria dividido

de bananas excedia em cinco o número de bananas da entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que,

semana anterior, e foi informado de que o preço da dúzia

para arcar com todas as despesas, faltavam R\$ 510,00,

de bananas tinha sido diminuído de um real. Quantas

e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo.

bananas ele comprou na semana anterior?

No acerto, foi decidido que a despesa total seria dividida

23. em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia (PUC Minas–2006) A diferença entre as raízes reais da

equação $x^2 + bx + 40 = 0$ é igual a 6. Então, o valor ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das

absoluto de **b** é 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 R\$ 7,00. De acordo com essas informações,

qual foi

24. (PUC Minas–2006) Sejam p e q números reais não nulos das 55 pessoas? o valor da cota calculada no acerto final para cada uma

tais que $+ p 2q$

$- 2 = 0$ e $p + q = 6$. Então, o valor de

$2q$ p A) R\$ 14,00

p é igual a B) R\$ 17,00

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7

C)
R\$
22,00

25. (UFMG–2008) Dois nadadores, posicionados em D) R\$ 32,00

lados opostos de uma piscina retangular e em raias

E)
R\$
57,00

adjacentes, começam a nadar em um mesmo instante,

com velocidades constantes. Sabe-se que, nas duas

primeiras vezes em que ambos estiveram lado a

lado, eles **03.** (Enem–2009) O mapa a seguir representa um bairro

nadavam em sentidos opostos: na primeira vez, a 15 m de determinada cidade, no qual as flechas indicam o

de uma borda e, na segunda vez, a 12 m da outra borda. sentido das mãos do tráfego. Sabe-se que esse bairro

Considerando-se essas informações, é **CoRReTo** afirmar foi planejado e que cada quadra representada na figura

que o comprimento dessa piscina é

é um terreno quadrado, de lado igual a 200 metros.

A) 21 m.

B) 27 m.

C) 33 m.

D) 54 m. Y

SEÇÃO ENEM_x

01. (Enem–2009) Na cidade de João e Maria, haverá *shows*

em uma boate. Pensando em todos, a boate propôs

pacotes para que os fregueses escolhessem o que seria

melhor para si.

Pacote 1: taxa de 40 reais por *show*.

Pacote 2: taxa de 80 reais mais 10 reais por *show*. Desconsiderando-se a largura das ruas, qual seria o

tempo, em minutos, que um ônibus, em velocidade

Pacote 3: taxa de 60 reais para 4 *shows*, e 15 reais por

cada *show* a mais. constante e igual a 40 km/h, partindo do ponto X,

demoraria para chegar até o ponto Y?

João assistirá a 7 *shows* e Maria, a 4. As melhores opções

para João e Maria são, respectivamente, os pacotes A) 25 min

A) 1 e 2 B) 15 min

B) 2 e 2

C) 3 e 1

D) 2 e 1 D) 1,5 min

E) 3 e 3 E) 0,15 min

20 Coleção Estudo

Equações e problemas

04. (Enem–2009) Joana frequenta uma academia de **06.** (Enem–2009) Nos últimos anos, o volume de petróleo

ginástica onde faz exercícios de musculação. O programa exportado pelo Brasil tem mostrado expressiva tendência

de Joana requer que ela faça 3 séries de exercícios de crescimento, ultrapassando as importações em 2008.

em 6 aparelhos diferentes, gastando 30 segundos Entretanto, apesar de as importações terem se mantido

em cada série. No aquecimento, ela caminha durante praticamente no mesmo patamar desde 2001, os recursos

10 minutos na esteira e descansa durante 60 segundos gerados com as exportações ainda são inferiores àqueles

para começar o primeiro exercício no primeiro aparelho. despendidos com as importações, uma vez que o preço

Entre uma série e outra, assim como ao mudar de médio por metro cúbico do petróleo importado é superior

aparelho, Joana descansa por 60 segundos. Suponha ao do petróleo nacional. Nos primeiros cinco meses

de 2009, foram gastos 2,84 bilhões de dólares com que, em determinado dia, Joana tenha iniciado seus importações e gerada uma receita de 2,24 bilhões de exercícios às 10h30min e finalizado às 11h7min. Nesse dólares com as exportações. O preço médio por metro dia e nesse tempo, Joana

cúbico em maio de 2009 foi de 340 dólares para o petróleo

A) não poderia fazer sequer a metade dos exercícios e importado e de 230 dólares para o petróleo exportado.

dispor dos períodos de descanso especificados em O quadro a seguir mostra os dados consolidados de 2001

seu programa.

a 2008 e dos primeiros cinco meses de 2009.

B) poderia ter feito todos os exercícios e cumprido

Comércio exterior de petróleo

rigorosamente os períodos de descanso especificados

(milhões de metros cúbicos)

em seu programa.

Ano importação exportação

C) poderia ter feito todos os exercícios, mas teria de ter

deixado de cumprir um dos períodos de descanso 2001 24,19 6,43 especificados em seu programa.

2002 22,06 13,63

D) conseguiria fazer todos os exercícios e cumpriria

2003 19,96 14,03

todos os períodos de descanso especificados em seu

MATEMÁTICA

programa, e ainda se permitiria uma pausa de 7 min. 2004
26,91 13,39

E) não poderia fazer todas as 3 séries dos exercícios 2005 21,97
15,93

especificados em seu programa; em alguma dessas 2006
20,91 21,36 séries deveria ter feito uma série a menos e
não

2007 25,38 24,45

deveria ter cumprido um dos períodos de descanso.

2008 23,53 25,14

05. (Enem–2010) Desde 2005, o Banco Central não fabrica 2009*
9,00 11,00

mais a nota de R\$ 1,00 e, desde então, só produz dinheiro

*Valores apurados de janeiro a maio de 2009.

nesse valor em moedas. Apesar de ser mais caro produzir

Disponível em: .

uma moeda, a durabilidade do metal é 30 vezes maior Acesso em:
15 jul. 2009 (Adaptação).

que a do papel. Fabricar uma moeda de R\$ 1,00 custa

Considere que as importações e exportações de petróleo

R\$ 0,26, enquanto uma nota custa R\$ 0,17; entretanto,

a cédula dura de oito a onze meses. de junho a dezembro de 2009
sejam iguais a das 7

Acesso em: 26 abr. 2010. de janeiro a maio de 2009. Nesse caso, supondo que

os preços para importação e exportação não sofram

Com R\$ 1 000,00 destinados a fabricar moedas, o Banco

alterações, qual seria o valor mais aproximado da diferença

Central conseguiria fabricar, aproximadamente, quantas entre os recursos despendidos com as importações e

cédulas a mais? os recursos gerados com as exportações em 2009?

A) 1 667 A) 600 milhões de dólares

B) 2 036 B) 840 milhões de dólares

C) 3 846 C) 1,34 bilhão de dólares

D) 4 300 D) 1,44 bilhão de dólares

E) 5 882 E) 2,00 bilhões de dólares

Editora Bernoulli 21

Frente B Módulo 03

07. (Enem–2010) Uma escola recebeu do governo uma verba

de R\$ 1 000,00 para enviar dois tipos de folhetos pelo correio.

Propostos

O diretor da escola pesquisou que tipos de selos deveriam

ser utilizados. Concluiu que, para o primeiro tipo de folheto, 01. E

bastava um selo de R\$ 0,65 enquanto para folhetos do 02. E
 segundo tipo seriam necessários três selos, um de R\$ 0,65,
 um de R\$ 0,60 e um de R\$ 0,20. O diretor solicitou que se 03. B
 comprassem selos de modo que fossem postados exatamente 04. B
 500 folhetos do segundo tipo e uma quantidade restante de
 selos que permitisse o envio do máximo possível de folhetos 05. B
 do primeiro tipo. Quantos selos de R\$ 0,65 foram comprados? 06. E
 A) 476 D) 965

$$07. m = -3 + 2^{1/2} \text{ ou } m = -3 - 2^{1/2}$$

B) 675 E) 1 538

08.
D

C) 923

09.
B

08. (Enem–2010) O salto triplo é uma modalidade do atletismo

10.
22

em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e

um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão 11. 225 km
 de automóvel e 325 km de motocicleta

em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro

12.
B

sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele

cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado. 13. B

Um atleta da modalidade salto triplo, depois de estudar

15.
E

seus movimentos, percebeu que, do segundo para o

primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, do terceiro 16. A)
24 caminhões

para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo B) 2 500
kg

atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os

seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto 17. D

teria de estar entre 18. A

A) 4,0 m e 5,0 m.

19.
D

B) 5,0 m e 6,0 m.

20.
D

C) 6,0 m e 7,0 m.

D) 7,0 m e 8,0 m. 21. 18 cavalos e 45 sacos de cimento

E) 8,0 m e 9,0 m. 22. 15

23.
D

GABARITO 24. A

Fixação 25. C

01. C Seção Enem

02. A 01. E 05. B

03. E 02. D 06. C

04. A 03. D 07. C

05. B 04. B 08. D

22 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Razões e proporções 04 B

Para $a, b \in \mathbb{R}$ ($b \neq$

0), o quociente é chamado razão A função por elas determinada é denominada função linear,

b

e o gráfico, se contínuo, é uma reta que passa pela origem.

entre **a** e **b** (nessa ordem, **a** é chamado antecedente, e **b**,

consequente). $\mathbb{F}_R$

Para $a, b, c, d \in \mathbb{F}$ ($b \neq 0, d \neq 0$), a igualdade de razões

é chamada proporção. $\mathbb{F}_2$

$$a \div b = c \div d, \text{ também escrita: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$b \neq 0, d \neq 0$$

α

Algumas propriedades das proporções

algumas equivalências entre proporções. Das propriedades dos números reais, podemos concluir $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$

Para $a, b, c, d \in \mathbb{F}^*$, tem-se:

exemplo

$$\Leftrightarrow ad = bc$$

Para um corpo de massa 2 kg:

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

$$b \mid d \in \mathbb{R}(\mathbb{N}) \quad 2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10$$

$$\Leftrightarrow a \mid b \mid c \mid d \mid + = +$$

$$a \mid a(m/s_2) \quad 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ c$$

$b \mid c \mid d \mid - = - \mid d \Leftrightarrow$ Duas grandezas, tais que o produto entre elas é sempre $b \mid a \mid c = a \mid b$

d

$$\Leftrightarrow a \mid b \mid c \mid d$$

$- = -$ constante, são chamadas grandezas inversamente

proporcionais. A função por elas determinada é uma função

$$a \mid c$$

$a \mid c \mid + \mid a \mid c \mid a \mid c = -$ recíproca, e o gráfico é uma hipérbole equilátera.

$$\Leftrightarrow = =$$

$$b \mid d \mid + \mid b \mid d \mid - \mid b \mid d \mid \text{ exemplo}$$

$$y \mid x = 8$$

NÚMEROS PROPORCIONAIS $y \mid x \mid y$

Considere um corpo de massa m . Sabemos que a razão

entre a força resultante que age sobre esse corpo e a sua

aceleração é constante e igual a m .

$$F_R = m a$$



Quando duas grandezas possuem razão constante, são chamadas de grandezas diretamente proporcionais.

Editora Bernoulli 23

Frente B Módulo 04

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. 01. (UERJ) Analise o gráfico e a tabela. (Unicamp-SP) A quantia de R\$ 1 280,00 deverá ser

dividida entre 3 pessoas. Quanto receberá cada uma, se

A) a divisão for feita em partes diretamente proporcionais
Combustível preço por litro (em reais)

a 8, 5 e 7?

Gasolina 1,50

B) a divisão for feita em partes inversamente

proporcionais a 5, 2 e 10? Álcool 0,75

Resolução: km

Sendo x, y e z a quantia, em reais, que cada pessoa

gasolina

receberá, então:

$$\begin{aligned} \text{A) } x \cdot 14 \cdot y \cdot z \cdot x \cdot y \cdot z + + 1 \cdot 280 \text{ álcool} &= = = = = 64 \\ \Leftrightarrow 8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 7 + + 20 \cdot 10 \end{aligned}$$

$\{x \mid 64 = \{x = 512 \mid 8 \mid \mid O \mid y \mid \mid 1 \text{ litro} \} = 64 \Leftrightarrow \{y = 320 \mid 5 \mid \mid \mid \mid$ De acordo com esses dados, a razão entre o custo do z $\mid = 64 \mid \setminus z = 448 \setminus 7$ consumo, por km, dos carros a álcool e a gasolina é igual a

$$\begin{aligned} \text{B) } x \text{ A) } 4 \cdot y \cdot z \cdot x \cdot y \cdot z + + 1 \cdot 280 &= = = = = 1 \cdot 600 \\ \Leftrightarrow 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 + + + + 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10 \text{ B) } \end{aligned}$$

$\{7 \cdot x \mid$

$$\begin{aligned} \mid \{x = 320 \cdot 8 \mid 5 \mid \mid y \mid \mid 1 \mid \mid 7 \mid 1 \cdot 5 \text{ C) } 7 \mid \mid &= \cdot 6 \cdot 1 \cdot 600 \\ = 1 \cdot 1 \cdot 600 \cdot x \mid \end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline \end{array} = 1\,600 \Leftrightarrow \{y = .1\,600 \Leftrightarrow \{y = 800\text{ D})\}$$

$$1 \mid 2 \mid 10 \mid \mid \mid 2 \mid \mid \mid zz \mid = 160 \mid z \mid 1$$

02. (UFU-MG) Gumercindo decidiu dividir sua fazenda de $z \mid = 1\,600 = .1\,600 \mid 1 \mid 10 \mid 30$ alqueires entre seus dois filhos João e José. Essa divisão $\mid \mid 10$ seria diretamente proporcional à produção que cada filho

conseguisse em uma plantação de soja. Eles produziram

02. juntos 1,5 tonelada de soja, sendo que José produziu 250 kg (UFOP-MG-2008) Duas torneiras são utilizadas para

a mais que João. Como foi dividida a fazenda?

encher um tanque vazio. Sozinhas, elas levam 10 horas e

15 horas, respectivamente, para enchê-lo. As duas juntas

enchem-no em **03.** (FUVEST-SP) O Sr. Reginaldo tem dois filhos,

nascidos, respectivamente, em 1/1/2000 e 1/1/2004.

A) 6 horas.

Em testamento, ele estipulou que sua fortuna deve ser

B) 12 horas e 30 minutos. dividida entre os dois filhos, de tal forma que

C) 25 horas. (1) os valores sejam proporcionais às idades.

D) 8 horas e 15 minutos. (2) o filho mais novo receba, pelo menos, 75% do valor

que o mais velho receber.

Resolução:

O primeiro dia no qual o testamento poderá ser cumprido é

A 1ª torneira possui uma velocidade de enchimento igual

A)

a v_1 1 tanque 1 tanque = , e a 2ª torneira, igual a v_2

$$= .$$

10 hora 15 hora B) 1/1/2014.

As duas torneiras juntas encherão o tanque com uma C) 1/1/2015.

velocidade $v_1, 2$ 1 1 3 2 5 tanque = $v_1 + v_2$

$$= + = + = , D) 1/1/2016.$$

10 15 30 30 hora

ou seja, encherão 5 tanques em 30 h, ou 1 tanque em 6 h. E) 1/1/2017.

24 Coleção Estudo

Razões e proporções

04. (UFU-MG) O orgulho de um colecionador de carros **03.**
(UFSCar-SP) Somando-se 4 ao numerador de certa

é seu velho fusca que apresenta desempenho de fração, obtém-se outra igual a 1. Subtraindo-se 1 do

10 km rodados para cada litro de gasolina, embora 1 denominador da fração original, obtém-se outra igual a . já tenha sofrido alguns “reparos” no tanque de 2 A combustível. Como esse colecionador irá participar Os termos da fração original representam os votos de B de uma feira de carros em outra cidade com seu

fusca, vai até um posto de combustível e abastece o dois candidatos, A e B, que foram para o 2º turno de uma

carro com exatamente 30,6 litros de gasolina. Mas, eleição, em que o candidato **B** obteve

no momento em que o colecionador inicia a viagem, A) 90% dos votos.

aparece um vazamento no tanque por onde escoa

0,1 litro de gasolina por hora. Sabendo-se que o B) 70% dos votos.

coleccionador pretende desenvolver uma velocidade C) 50% dos votos.

constante de 50 km/h durante a viagem, a distância

MáXiMA que o fusca irá percorrer, até esgotar toda a D) 30% dos votos.

gasolina do tanque, será de E) 10% dos votos.

A) 300 km. C) 306 km.

04. (UFU-MG) Paulo, Ana e Luís formaram uma sociedade e

B) 240 km. D) 280 km.

investiram, respectivamente, R\$ 2 500,00; R\$ 3 500,00

05. e R\$ 4 000,00 num fundo de investimentos. Após um

(UFG-2007) Para encher um recipiente de 5 litros, uma

ano, a aplicação estava com um saldo de R\$ 12 500,00.

torneira gasta 12 segundos. Uma segunda torneira gasta

Se os três investidores resgatarem somente o rendimento

18 segundos para encher o mesmo recipiente. Nessas

e dividirem-no em partes diretamente proporcionais aos

condições, para encher um tanque de 1 000 litros, usando

valores investidos, a diferença entre os valores recebidos

as duas torneiras ao mesmo tempo, serão necessários

por Ana e por Paulo será igual a

A) 20 minutos. D) 50 minutos.

A) R\$ 125,00. C) R\$ 250,00.

B) 24 minutos. E) 83 minutos.

B) R\$ 1 000,00. D) R\$ 500,00. **MATEMÁTICA**

C) 33 minutos.

05. (UEL-PR) Sabe-se que a sequência (x, y, z) é inversamente

EXERCÍCIOS PROPOSTOS (1) proporcional
à sequência $|, , 2 4 |$. Se $x + y + z = 176$, (2)

então $x - y$ é igual a

01. (UFMG–2009) Paula comprou dois potes de sorvete,

ambos com a mesma quantidade do produto. Um dos z A) – D) 4z
8 potes continha quantidades iguais dos sabores chocolate,

creme e morango; e o outro, quantidades iguais dos z B) – E) 6z
sabores chocolate e baunilha. Então, é **CoRReTo** afirmar 4

que, nessa compra, a fração correspondente à quantidade
de sorvete do sabor chocolate foi C) 2z

A) **06.** 2

5 (PUC-Campinas-SP) Segundo a Lei de Boyle-Mariotte,

sabe-se que “a uma temperatura constante, os volumes

B) 3 de uma mesma massa de gás estão na razão inversa

5 das pressões que produzem”. Se, sob a pressão de
5 5 atmosferas, uma massa de gás ocupa um volume de

C) $0,6 \text{ dm}^3$, a expressão que permite calcular a pressão p , 12

em atmosferas, em função do volume v , em dm^3 , ocupado

D) 5 por essa massa de gás, é

6

3 5P

02. A) $V = D$) $V =$ (Unimontes-MG–2009) Um pai repartiu R\$ 33,00 entre seus P 6

três filhos, em partes inversamente proporcionais às idades 25 B) $V = 3P$ E) $V =$ deles, as quais são 2, 4 e 6 anos. O mais novo recebeu 3P

A) R\$ 6,00. C) R\$ 16,50. 5

B) R\$ 18,00. D) R\$ 11,00. 6P C) $V =$

Editora Bernoulli 25

Frente B Módulo 04

07. (Mackenzie-SP) Na figura a seguir, Q é um ponto do gráfico **11.** (UFMG–2007) Um carro bicomcombustível percorre 8 km

da função $y = f(x)$, com x e y inversamente proporcionais. com um litro de álcool e 11 km com um litro do

combustível constituído de 75% de gasolina e de 25%

y de álcool, composição adotada, atualmente, no Brasil.

Recentemente, o Governo brasileiro acenou para uma

possível redução, nessa mistura, da porcentagem de álcool, que passaria a ser de 20%. Suponha que o número P de quilômetros que esse carro percorre com um litro dessa

mistura varia linearmente de acordo com a proporção de álcool utilizada. Então, é **CoRReTo** afirmar que, se for utilizado um litro da nova mistura proposta pelo Governo,

O x esse carro percorrerá um total de

A) 11,20 km. C) 11,50 km.

Se $(x, y) = \left(5 \sqrt{3} \right)$ B) 11,35 km. D) 11,60 km. $\left(\frac{1}{2}, 480 \right)$ é um ponto da curva, então a área $\left(\frac{1}{3} \right)$

do triângulo OPQ é **12**. (UFF-RJ) Em situações do cotidiano, é comum usar-se

como unidade de medida o palmo (da própria mão). Porém,

A) 160

essa unidade varia de pessoa para pessoa. João mediu o

B) 320 comprimento de uma peça de tecido e encontrou 30 palmos.

Alfredo encontrou, para a mesma peça de tecido,

C) 380

a medida de 27 palmos. Pode-se afirmar que 10 palmos

D) 400 de João equivalem a

E) 800 A) 0,1 palmo de Alfredo.

B)
0,9
palmo
de

08. (VUNESP) Segundo matéria publicada em *O Estado de São C*) 9 palmos de Alfredo. *Paulo*, 09/06/96, o Instituto Nacional de Seguridade Social D) 10 palmos de Alfredo. (INSS) gasta atualmente 40 bilhões de reais por ano com

o pagamento de aposentadorias e pensões de 16 milhões E) 11,1 palmos de Alfredo.

de pessoas. A mesma matéria informa que o Governo

Federal gasta atualmente 20 bilhões de reais por ano com **13.** (UFU-MG) Um maratonista calcula que, se correr a uma

o pagamento de um milhão de servidores públicos federais velocidade constante de 10 km por hora, chegará ao

aposentados. Indicando por x a remuneração anual média fim do percurso da corrida às 10:00 horas. Contudo,

dos beneficiários do INSS e por y a remuneração anual se sua velocidade constante for de 15 km por hora, ele

média dos servidores federais aposentados, então y é chegará às 8:00 horas. Para que ele chegue exatamente

igual a às 9:00 horas, sua velocidade constante deverá ser de

A) $2x$ D) $10x$ A) 12 km/h. D) 11,5 km/h.

B) $6x$ B) 12,5 km/h E) 13 km/h. E) $16x$

C)
11
km/
h.

C) $8x$

09. 14. (UFPE) Uma substância X é composta de três elementos

(UFU-MG) João e José são aparadores do gramado de um

campo de futebol e gastam, respectivamente, 7,5 horas **A**, **B** e **C**, na proporção de 2:3:5 partes de volume.

e 6 horas para aparar individualmente todo o gramado. Um litro do elemento **A** pesa três vezes mais que um

Se João e José trabalharem juntos, quantas horas eles litro do elemento **C**, enquanto um litro do elemento **B**

levarão para aparar 75% de todo o gramado? pesa duas vezes mais que um litro do elemento **C**.

Se x é o quociente entre o peso de um litro da substância **X**

10. e o peso de um litro do elemento **C**, **DeTeRMiNe** x . (UEL-PR)

José limpa o vestiário de um clube de futebol

em 30 minutos, enquanto seu irmão, Jair, limpa o mesmo

vestiário em 45 minutos. Quanto tempo levarão os dois **15.**
(Unicamp-SP) Dois navios partiram ao mesmo tempo,

para limpar o vestiário juntos? de um mesmo porto, em direções perpendiculares e a

velocidades constantes. Trinta minutos após a partida,

A) 15 minutos e 30 segundos a distância entre os dois navios era de 15 km e, após mais

B) 18 minutos 15 minutos, um dos navios estava 4,5 km mais longe do

porto
que
o
outro.

C) 20 minutos

A) Quais as velocidades dos dois navios, em km/h?

D) 36 minutos

B) Qual a distância de cada um dos navios até o porto

E) 37 minutos e 30 segundos de saída, 270 minutos após a partida?

26 Coleção Estudo

Razões e proporções

16. (Unicamp-SP) Retiraram-se x litros de vinho de um barril **03.**
(Enem–2009) Um comerciante contratou um novo

de 100 litros e adicionaram-se, ao mesmo barril, x litros funcionário para cuidar das vendas. Combinou pagar a

de água. Da mistura resultante no barril, retiram-se essa pessoa R\$ 120,00 por semana, desde que as vendas

outros x litros e adicionam-se outros x litros de água. se mantivessem em torno dos R\$ 600,00 semanais e,

Agora o barril contém 64 litros de vinho e 36 de água. como um estímulo, também propôs que na semana na

CAICULE o valor de x . qual ele vendesse R\$ 1 200,00, ele receberia R\$ 200,00,

em vez de R\$ 120,00. Ao término da primeira semana,

esse novo funcionário conseguiu aumentar as vendas

para R\$ 990,00 e foi pedir ao seu patrão um aumento

SEÇÃO ENEM proporcional ao que conseguiu aumentar nas vendas. O patrão concordou e, após fazer algumas contas, pagou

ao funcionário a quantia de

01. A) R\$ 160,00. D) R\$ 180,00. (Enem–2000) Uma companhia de

seguros levantou

dados sobre os carros de determinada cidade e B) R\$ 165,00. E) R\$ 198,00.

constatou que são roubados, em média, 150 carros C) R\$ 172,00.

por ano. O número de carros roubados da marca X é

o dobro do número de carros roubados da marca Y,

04. (Enem–2009) *Uma resolução do Conselho Nacional de*

e as marcas X e Y juntas respondem por cerca de 60% Política Energética (CNPE) estabeleceu a obrigatoriedade

dos carros roubados. O número esperado de carros de adição de biodísel ao óleo dísel comercializado nos

roubados da marca Y é postos. A exigência é que, a partir de 1º de julho de 2009,

4% do volume da mistura final seja formada por biodísel.

A) 20 Até junho de 2009, esse percentual era de 3%. Essa

medida estimula a demanda de biodísel, bem como

B) 30

possibilita a redução da importação de dísel de petróleo.

C) 40 Disponível em: .

Acesso em: 12 jul. 2009 (Adaptação).

D) 50

Estimativas indicam que, com a adição de 4% de biodísel

E) 60 ao dísel, serão consumidos 925 milhões de litros de **MATEMÁTICA**

biodísel no segundo semestre de 2009.

Considerando-se

02. (Enem–2009) *As abelhas domesticadas da América do essa* estimativa, para o mesmo volume da mistura final

Norte e da Europa estão desaparecendo, sem qualquer dísel / biodísel consumida no segundo semestre de 2009,

motivo aparente. As abelhas desempenham papel qual seria o consumo de biodísel com a adição de 3%?

fundamental na agricultura, pois são responsáveis pela A) 27,75 milhões de litros

polinização (a fecundação das plantas). Anualmente, B) 37,00 milhões de litros

apicultores americanos alugam 2 milhões de colmeias

C) 231,25 milhões de litros

para polinização de lavouras. O sumiço das abelhas já

inflacionou o preço de locação das colmeias. No ano D) 693,75 milhões de litros

passado, o aluguel de cada caixa (colmeia) com E) 888,00 milhões de litros

50 000 abelhas estava na faixa de 75 dólares. Depois

05. (Enem–2009) *O Indicador do CadÚnico (ICadÚnico), que*

do ocorrido, aumentou para 150 dólares. A previsão

compõe o cálculo do Índice de Gestão Descentralizada

é que falem abelhas para polinização neste ano nos

do Programa Bolsa Família (IGD), é obtido por meio da

EUA. Somente as lavouras de amêndoa da Califórnia

média aritmética entre a taxa de cobertura qualificada

necessitam de 1,4 milhões de colmeias.

de cadastros (TC) e a taxa de atualização de cadastros

Disponível em: . (TA), em que NV NA Acesso em: 23 fev. 2009
(Adaptação). $TC =$, $TA =$, NV é o número de

NF NV

De acordo com essas informações, o valor a ser gasto *cadastros domiciliares válidos no perfil do CadÚnico*,

pelos agricultores das lavouras de amêndoa da Califórnia NF é o *número de famílias estimadas como público-alvo*

com o aluguel das colmeias será de *do CadÚnico e NA é o número de cadastros domiciliares*

atualizados no perfil do CadÚnico.

A) 4,2 mil dólares. Portaria n° 148, 27 de abr. 2006 (Adaptação).

B) 105 milhões de dólares. Suponha que o IcadÚnico de um município específico

C) 150 milhões de dólares. é 0,6. Porém, dobrando NF o IcadÚnico cairá para 0,5.

Se $NA + NV = 3\ 600$, então NF é igual a

D) 210 milhões de dólares. A) 10 000 C) 5 000 E) 3 000

E) 300 milhões de dólares. B) 7 500 D) 4 500

Editora Bernoulli 27

Frente B Módulo 04

06. (Enem–2009) Segundo as regras da Fórmula 1, o peso

mínimo do carro, de tanque vazio, com o piloto, é de

GABARITO

605 kg, e a gasolina deve ter densidade entre 725

e 780 gramas por litro. Entre os circuitos nos quais

ocorrem competições dessa categoria, o mais longo é

Fixação

Spa-Francorchamps, na Bélgica, cujo traçado tem 7 km

de extensão. O consumo médio de um carro da Fórmula 1 01. D

é de 75 litros para cada 100 km. Suponha que um

piloto de uma equipe específica, que utiliza um tipo de 02. José:
17,5 alqueires

gasolina com densidade de 750 g/L, esteja no circuito de João: 12,5
alqueires

Spa-Francorchamps, parado no box para reabastecimento.

Caso ele pretenda dar mais 16 voltas, ao ser liberado para 03. D

retornar à pista, seu carro deverá pesar, no mínimo, 04. A

A) 617 kg. C) 680 kg. E) 717 kg.

B) 668 kg. D) 689 kg.

05.
B

07. Propostos (Enem–2010)

A resistência elétrica e as dimensões do 01. C

condutor 02. B

A relação da resistência elétrica com as dimensões do 03. B
condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio
de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram 04. C
que existe proporcionalidade entre: 05. E

- resistência (R) e comprimento (l), dada a mesma
secção transversal (A); 06. A

- resistência (R) e área da secção transversal (A), dado 07. D
o mesmo comprimento (l) e 08. C

- comprimento (l) e área da secção transversal (A),
dada a mesma resistência (R). 09. 2,5 horas

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar 10. B
o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica 11. A
utilizando as figuras seguintes.

12.
C

fio condutor

A resistência R 13. A

$$14. x = 1,7$$

fios de mesmo material fios de mesmo material fios de mesmo material

A 15. A) 24 km/h e 18 km/h resistência R A resistência R A resistência R

B) 108 km e 81 km

A _ R resistência 2R 2A resistência 2A resistência R 2 16. $x = 20$

Disponível em: . **Seção Enem**

Acesso em: abr. 2010 (Adaptação).

01.
B

As figuras mostram que as proporcionalidades existentes 02. D
entre resistência (R) e comprimento (l), resistência (R) e
área da secção transversal (A), e entre comprimento
(03. C l)

e área da secção transversal (A) são, respectivamente, 04. D
A) direta, direta e direta.

05.
C

B) direta, direta e inversa.

C) direta, inversa e direta. 06. B

D) inversa, direta e direta. 07. C

E) inversa, direta e inversa.

28 Coleção Estudo MATEMÁTICA

MÓDULO FRENTE Função 03 C

CONCEITOS BÁSICOS

Esquemáticamente, temos:

$$f: A \rightarrow B$$

Produto cartesiano $A \times B$

O produto cartesiano $A \times B$ de dois conjuntos A e B não vazios é definido como o conjunto de todos os pares

ordenados (x, y) , nos quais x pertence a A , e y pertence a B .



$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

exemplo

Sejam os conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 5\}$.

Obter os

produtos cartesianos $A \times B$, A Em outras palavras, cada um dos elementos do conjunto A e $B \times A$.

está relacionado a um único elemento do conjunto B .

Resolução:

No diagrama anterior, definimos o seguinte:

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5), (4, 1), (4, 5)\}$$

$A = \{ (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4) \}$ i) O conjunto A é o domínio da função.

$(4, 3), (4, 4) \}$ ii) O conjunto B é o

contradomínio da função.

$$B \times A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$$

iii) Os elementos do contradomínio que estão

Relação relacionados, por setas, com os elementos de A

formam o conjunto imagem da função.

Dados dois conjuntos, A e B, não vazios, definimos uma

relação R de A em B como um subconjunto de $A \times B$.

Considere $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2\}$.

FUNÇÕES DEFINIDAS POR

$$A \times B = \{(-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1,$$

2), **FÓRMULAS**

$$(2, 1), (2, 2)\}$$

Assim, duas relações de A em B poderiam ser:

Algumas funções têm a sua lei de correspondência

$$R = \{(x, y) \mid x \in A \times B \mid y = x\} = \{(1, 1), (2, 2)\} \\ M = \{-1, 0, 1, 2\} \text{ e } N = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \text{ defini}$$

nida por fórmulas. Por exemplo, sejam dois conjuntos

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\} = \{(0, 1), (1, 2)\}$$

Seja f uma função que associa a cada elemento de M

o seu dobro, acrescido de uma unidade. Denotando por x um

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO elemento genérico do domínio M e denotando por y a sua

correspondente imagem no conjunto N , temos a fórmula:

Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma relação f de $y = 2x + 1$, $x \in M$

A em B é função de A em B se, e somente se, para todo

$x \in A$ • Para $x = -1 \Rightarrow y = 2(-1) + 1 \Rightarrow y = -1; \in A$ se associa a um único $y \in B$, tal que $(x, y) \in f$.

• Para $x = 0 \Rightarrow y = 2(0) + 1 \Rightarrow y = 1;$



Sistema de notação • Para $x = 1 \Rightarrow y = 2(1) + 1 \Rightarrow y = 3;$



A função f de A em B pode ser indicada por $f: A \rightarrow B$. • Para $x = 2 \Rightarrow y = 2(2) + 1 \Rightarrow y = 5$.



Editora Bernoulli 29



Frente C Módulo 03

M f N GRÁFICOS DE FUNÇÕES

-1

-1 O gráfico de uma função $f: \square \rightarrow \square$ é dado pelo conjunto de

-2 todos os pontos (x, y) do plano cartesiano tais que $y = f(x)$. 0

o 2 Seguem alguns exemplos de gráficos de funções:

1 y y

1 4

3

2 6 5 0 x 0 x

Gráfico (I) Gráfico (II)

y y

Dizemos que x é a variável independente, e y , a variável

dependente. Assim, a variável y é dita função de x ,

e escrevemos $y = f(x)$. 0 x 0 x

Gráfico (III) Gráfico (IV)

DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO exemplo

Dada a função $f: A \rightarrow \square$, na qual $f(x) = 2x - 4$ e

$A = [0, 6]$, representar o seu gráfico no plano cartesiano.

Determinar o domínio de uma função significa saber

Resolução:

para quais valores de x a expressão matemática y está

Vamos escolher alguns valores para x dentro do domínio A

fornecido e substituí-los na expressão matemática dada.

definida, ou seja, quais valores podem ser atribuídos à y .
Com os resultados, temos a seguinte tabela:

variável x de modo a não violar as condições de existência $x \in A$

da expressão matemática. $0 \leq x \leq 4$

1 - 2

exemplos 2.0

3 - 2

1º) Na função $y = 3x + 7$, para qualquer valor real

4 - 4

de x existe uma imagem y correspondente. Logo,
5 - 6

o domínio dessa função é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$.

Marcando esses pares (x, y) no plano cartesiano, obtemos

2º) Na função $y = x^2 - 4$ o gráfico da função. 1

$x \in \mathbb{R}$, devemos observar que $x^2 - 4 \geq 0$ é

$x^2 - 4 \geq 0$

denominador de uma fração e, portanto, deve ser

diferente de zero, ou seja, $x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$.

Então, 7

o domínio dessa função é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\}$. 5

3º) 3 Na função $y = x - 5$, devemos observar que

$x - 5$ é o radicando de uma raiz quadrada. Esse 1

radicando deve ser maior ou igual a zero, ou

seja, -2 0 -1 1 2 3 4 5 6 x

$$x - 5 \geq -2 \cdot 0 \Rightarrow x \geq$$

5. Então, o domínio dessa função

deve ser $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$.

RECONHECIMENTO DO GRÁFICO DOMÍNIO E IMAGEM DE

DE UMA FUNÇÃO UMA FUNÇÃO A PARTIR

Observe os seguintes gráfi cos. **DO SEU
GRÁFICO**

Gráfi co I

y Considere o gráfi co da função a seguir:

B Imagem

y
8

(Projeção
no eixo
das
ordenadas)
3
1

O 1 2 5 6 x

O x Domínio

A (Projeção no eixo

das abscissas)

Gráfico II

Observe que a função está definida para um intervalo

y

limitado de valores de x, a saber, o intervalo [1, 6].

Esse

intervalo, que é a projeção ortogonal do gráfico sobre

o eixo

das abscissas, é o domínio da função. Os

correspondentes

valores de y são dados pelo intervalo [1, 8]. Esse

intervalo, **MATEMÁTICA**

B que é a projeção ortogonal do gráfico sobre o eixo

das

ordenadas, é a imagem da função.

Portanto, temos domínio: $D = [1, 6]$ e imagem: $Im =$

$[1, 8]$.

O x ESTUDO DO SINAL DE A

Sejam **A** e **B** os intervalos numéricos destacados em cada **UMA FUNÇÃO**

gráfico.

Estudar o sinal de uma função significa determinar para

No gráfico I, existem elementos do conjunto **A** que estão quais valores de **x** os correspondentes valores de **y** são

relacionados com mais de um elemento do conjunto **B**. negativos, nulos ou positivos. Portanto, tal gráfico não representa uma função de **A** em **B**.

exemplo

No gráfico II, cada elemento de **A** está relacionado com

um único elemento de **B**. Portanto, tal gráfico representa. Considere o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a seguir: uma função de **A** em **B**.

y



De modo geral, para verificarmos se um gráfico



representa uma função de **A** em **B**, basta traçarmos



retas paralelas ao eixo Oy a partir dos elementos de **A**.



Assim, se cada reta interceptar o gráfico em um único $-4 \leq x \leq 7$



(raiz) (raiz) (raiz)



ponto, trata-se do gráfico de uma função.



Analisando o gráfico anterior, temos: **iii) Função constante:** Uma função é dita constante

i) quando, para quaisquer valores x_1 e x_2 do seu domínio, $f(x_1) = f(x_2)$. Para $-4 < x < 3$ ou $x > 7$, os valores correspondentes temos $f(x_1) = f(x_2)$. Em outras palavras, quando os x_1 e x_2 de y são negativos.

Apresentamos esse fato com os valores de x aumentam, os valores correspondentes

signais de menos indicados no gráfico. de y permanecem iguais.

ii) **exemplo** Para $x = -4$, $x = 3$ ou $x = 7$, a ordenada correspondente

é nula. Esses pontos são chamados raízes ou zeros $f(x)$ da função.

iii) $f(x_1)$ Para $x < -4$ ou $3 < x < 7$, os valores correspondentes $f(x_2)$

de y são positivos. Apresentamos esse fato com os

signais de mais indicados no gráfico.

x_1 O x_2 x

FUNÇÃO CRESCENTE, GRÁFICOS: TRANSLAÇÕES

DECRESCENTE E CONSTANTE E REFLEXÕES

i) Em várias situações, é possível efetuar a construção de **Função crescente**: Uma função é dita crescente

quando, para quaisquer valores x e x_1 do seu domínio, tais que $x < x_1$, temos $f(x) < f(x_1)$.
gráficos mais complexos a partir de translações ou reflexões

de gráficos de funções mais simples.

domínio, tais que $x < x_1$, temos $f(x) < f(x_1)$.
Em outras palavras, quando os valores de x aumentam, 1) Tomemos como exemplo o gráfico da função

os valores correspondentes de y também aumentam. $f(x) = x + 2$, com domínio $\mathbb{R}$.

exemplo $y = f(x)$ $x = f(x) = x + 2$

-3 -1 3

$y = -2$

-1 1 1

0 2 0 -1 -3 -2 1 2 x

$f(x_2) = 1$

$f(x)$ Como seria o gráfico da função $f(x + 1)$ para todo x

real? Para responder a essa pergunta, tomemos os

seguintes valores tabelados:

$$f(x + 1) = (x + 1) + 2 = x + 3$$

ii) Função decrescente: Uma função é dita decrescente

quando, para quaisquer valores x_1 e x_2 do seu domínio, $x_1 < x_2$

tais que $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$. Em outras

palavras, quando os valores de x aumentam, os valores correspondentes de y diminuem.

1 4

exemplo

2 5

$f(x)$

O gráfico correspondente é:

$$f(x) = f(x + 1) + y$$

1) 5

$$f(x_2) = 2$$

$$x_1 \quad O \quad x_2 \quad x$$

$$-3 \quad -2 \quad -1 \quad O \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad x$$

32 Coleção Estudo

Função

Observe que o gráfico da função $f(x + 1)$ equivale ao gráfico da função $f(x)$ deslocado uma unidade para a esquerda. Portanto, o gráfico de $f(x + 1)$ é obtido

deslocando o gráfico de $f(x)$ duas unidades para cima. Portanto, o gráfico de $f(x + 1)$ é obtido

Generalizando, seja o gráfico de uma função $f(x)$ com domínio D e k um número real positivo. Assim, temos:

- i) O gráfico da função $g(x) = f(x) + k$ é obtido pelo deslocamento do gráfico de $f(x)$ de k unidades para cima.
- ii) O gráfico da função $g(x) = f(x) - k$ é obtido pelo deslocamento do gráfico de $f(x)$ de k unidades para baixo.

5 $f(x)$ para cima. 4

ii) O gráfico da função $g(x) = f(x) - k$ é obtido pelo deslocamento do gráfico de $f(x)$ de k unidades para baixo.

deslocamento do gráfico de $f(x)$ de k unidades

2 para baixo. 1

exemplo

$$-3 -2 -1 0 1 2 3 4 x y -1 f(x) + k -2 k -3$$

$f(x)$

De maneira geral, seja o gráfico de uma função $f(x)$

com domínio $O_x \square$ e k um número real positivo. Assim, temos:

$$f(x) - k$$

i) O gráfico da função $f(x + k)$ é obtido pelo

$$-k$$

deslocamento do gráfico de $f(x)$ de k unidades

para a esquerda. **3)** Considere, a seguir, o gráfico da função $f(x) = 3x$

ii) com domínio $O_x \square$ O gráfico da função $f(x - k)$ é obtido pelo $\square$.

deslocamento do gráfico de $f(x)$ de k unidades $y f(x)$

para a direita.

exemplo $x f(x) = 3x^4$

$f(x + k)$ -2 -6 $f(x)$ $f(x - k)$ **MATEMÁTICA** y 3

2

 -1 -3 1 -2 -1 $-k$ 0 0 1 2 x 0 -1 0 k x 1 -2 3 -3

2) 2 6 -4 Considere, ainda, o gráfico da função $f(x) = x + 2$ -5 para todo x real. Seja uma função $g: \square \rightarrow \square$ dada -6 por $g(x) = 2 + f(x)$. Assim, temos:

Agora, vamos construir o gráfico da função $f(-x)$ para

$$x f(x) = x + 2 \quad g(x) = 2 + f(x)$$

todo
 x
real.

 -2 $f(-x)$ y 0 -3 -1 1

2

6

 -1 1 3

$$0 \ 2 \ 4 \ x \ f(-x) = 3(-x) = -3x \ 4 \ 5 \ 1 \ 3 \ 5$$

$$-2 \ 6 \ 3$$

$$2 \ 4 \ 6 \ 2$$

$$-1 \ 3$$

Na figura a seguir, encontram-se representados 1
os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$ em um mesmo
0 0 -2 1 2 sistema cartesiano. -1 O x

$$y \ 1 \ -3 \ -2 \ g(x) \ -1 \ f(x)$$

$$4 \ 2 \ -3 \ -6$$

$$-4$$

$$3 \ -5$$

$$2 \ -6 \ 1$$

Observe que o gráfico da função $f(-x)$ é obtido por
-4 -3 -2 -1 O 1 2 x uma **reflexão**, em relação ao eixo y,
do gráfico da
-1 função $f(x)$.

Editora Bernoulli 33

Frente C Módulo 03

- 4) Novamente, vamos utilizar o exemplo da função
03. (UFMG) Dos gráficos, o **úNiCo** que representa uma

$f(x) = x + 2$, cujo gráfico foi representado no item 1. função de imagem $\{y \in \mathbb{R}: 1 \leq y \leq 4\}$ e domínio $\{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x < 3\}$ é função $g(x) = -f(x)$.
 A) y C) y E) y

$$f(x) = x + 2 \quad g(x) = -f(x)$$

$$-2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1$$

$$-1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad x \quad 0 \quad 3 \quad x \quad 0 \quad 3 \quad x$$

B)
y
D)
y

$$0 \quad 2 \quad -2$$

$$4 \\ 4$$

$$1 \quad 3 \quad -3$$

$$2 \quad 4 \quad -4 \quad 1 \quad 1$$

$$y \quad 0 \quad 3 \quad x \quad 0 \quad 3 \quad x$$

04. (UFMG) Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f(5x) = 5 f(x)$ para

2 todo número real x . Se $f(25) = 75$, então o valor de $f(1)$ é

$$-1 \quad 1 \quad A) \quad 3 \quad B) \quad 5 \quad C) \quad 15 \quad D) \quad 25 \quad E) \quad 45 \quad 1 \quad 2$$

$$-2 \quad 0 \quad x$$

05. (UFU-MG) Se f é uma função cujo gráfico é dado a seguir,

-2 então o gráfico da função g , tal que $g(x) = f(x - 1)$, será

-3 dado por

-4

y

1

-2

-1 O x

-1

Observe que o gráfico da função $-f(x)$ é obtido por

uma **reflexão**, em relação ao eixo x , do gráfico da f

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO função $f(x)$.

A) y C) y 1 1 -1 -2 -1 1 -2 O x O x -1 -1 -2 g -3 **01.** (UFPA) Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2\}$. g

Qual das afirmativas a seguir é **veRDADeiRA**? B) y D) y

A) $f: x \rightarrow 2x$ é uma função de **A** em **B**. 2 -1 O 1 x B) $f: x \rightarrow x + 1$ é uma função de **A** em **B**. -1 C) $f: x \rightarrow x^2 - 3x + 2$ é uma função de **A** em **B**. -2 -3 -2 -1 O x g g D) $f: x \rightarrow x^2 - x$ é uma função de **B** em **A**.

E) $f: x \rightarrow x - 1$ é uma função de **B** em **A**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS **02.** (UFMG) Na

figura, estão esboçados os gráficos de duas

funções **f** e **g**. O conjunto $\{x \mid f(x) \cdot g(x) < 0\}$ é dado por

gráfico de uma função real $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, é

y

f g A) y C) y E) y

-1 O 2 x

O a b x O a b x O a b x

A) $x > 0$ ou $x < -1$

B) $-1 < x < 0$ B) D) y y

C) $0 < x < 2$

D) $-1 < x < 2$

E) $x < -1$ ou $x > 2$ O a b x O a b x

34 Coleção Estudo

Função

02. (UFMG–2010) Considere a função: **05.** (UECE) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função tal que $f(1) = 4$ e

$f(x + 1) = 4 f(x)$ para todo real. Nessas condições, $f(10)$

$f(x) = \begin{cases} 4^x & \text{se } x \text{ é racional} \\ 4^{-x} & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$ A) 2^{-10} B) 4^{-10}

Então, é **CoRReTo** afirmar que o **MAior** elemento do C) 2^{10}

conjunto $\{ D \}$ $4_{10} \left(\begin{array}{c} 7 \\ \backslash \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 24 \\ \backslash \end{array} \right) f, (), (,), f 1 f 3$
 $14 f \mid \mid \acute{e} \{ \mid \mid \mid \} \} 31 \mid \mid \backslash \bigcup 2 \mid \mid \backslash \bigcup \mid 1$ **06.** (UFMG)
 Seja $f(x) = \dots$. Se $x \neq 0$, uma expressão para $x^2 + 1 \left(\begin{array}{c} 7 \\ \backslash \end{array} \right) A) f \left(\begin{array}{c} \mid \mid \\ \mid \mid \end{array} \right) 1 \left(\begin{array}{c} \backslash \end{array} \right)$
 $31 f \mid \mid \acute{e} \left(\begin{array}{c} \backslash \\ \backslash \end{array} \right) x \left(\begin{array}{c} \backslash \end{array} \right)$

B) $f(1)$ A) $x^2 + 1$

C) $f(3,14)$ $2 x + 1$ B) $x^2 \left(\begin{array}{c} \backslash \end{array} \right) 24$ D) $f \mid \mid 1 \mid \mid 2$ C) $\left(\begin{array}{c} \backslash \end{array} \right) x^2 + 1$

03. x^2 (UFMG) Suponha-se que o número $f(x)$ de funcionários D)

x^2
 $+$
 1

necessários para distribuir, em um dia, contas de luz

entre x por cento de moradores, numa determinada E) N.d.a.

cidade, seja dado pela função $f(x) = \dots$. Se o número $2x$ $300x$

$150 - x$ **07.** (UFMG) Seja $f(x) = 3$. Sabendo-se que $f(x + h) = 9 f(x)$

de funcionários necessários para distribuir, em um dia, as para todo valor real de x , o valor de h é

contas de luz foi 75, a porcentagem de moradores que A) 0 B) 1 C)
 2 D) 3 E) 4 **MATEMÁTICA**

as receberam é

08. (UFMG) Se f é uma função tal que $f(1) = 3$ e

A) 25

$f(x + y) = f(x) + f(y)$ para qualquer x e y reais, então

B) 30 $f(2)$ é igual a

C) 40 A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 8

D) 45 **09.** (UFMG) Sendo $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x > 0$, o valor de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ é igual a

04. 1 (UFMG) Em uma experiência realizada com camundongos, A) D) x

foi observado que o tempo requerido para um camundongo x

percorrer um labirinto, na n -ésima tentativa, era dado por $f(n) = 3 + \frac{1}{n}$ minutos. Com relação a essa expressão, pode-se afirmar que um camundongo

A) consegue percorrer o labirinto em menos de três

minutos. **10.** (UFMG) Seja $f(x) = \frac{1}{x}$. O valor da expressão $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)$ para

para
 $x \neq a$,
é

B) gasta cinco minutos e 40 segundos para percorrer o

labirinto na quinta tentativa. A) 0

C) gasta oito minutos para percorrer o labirinto na B) -1

D) percorre o labirinto em quatro minutos na décima terceira tentativa. 1 – C) ax

E) percorre o labirinto, numa das tentativas, em três tentativa. 1 D)
– x a –

minutos e 30 segundos. E) $a - x$

Editora Bernoulli **35**

Frente C Módulo 03

11. (UFMG–2008) Neste plano cartesiano, estão representados **14.**
(UFMG) Observe a figura a seguir. Nela, estão

os gráficos das funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$, ambas representados o ponto **A**, cuja abscissa é 1, e o ponto **B**,

definidas no intervalo aberto $]0, 6[$. cuja ordenada é 5. Esses dois pontos pertencem ao

y gráfico da função $f(x) = (x + 1)(x^3 + ax + b)$, em que

a e **b** são números reais. Assim, o valor de $f(4)$ é

$g \ f(x) \ f \ g$

f

3 4 5 B

O 6 x 1 2

Seja s o subconjunto de números reais definido por

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 65 \leq x \leq 115 \text{ B) } 115 \leq x \leq 170 \text{ D) } 225 \leq x \leq 275\}; f(x).g(x) < 0\}$. Então, é **CoRReto** afirmar

que s é

A) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 6\}$

B) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 5\}$

C) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$

D) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 6\}$

12. $f(x+1) - f(x-1)$ (UFMG) Se $f(x) = a \cdot x^2$, pode-se afirmar que $f(x)$

é igual a

O x

A) $f(x-1)$

B) $f(x)$ e k uma constante real tal que $k > 0$. O gráfico que

Melhor representa a função g tal que $g(x) = f(x-k) + k$ é

C) $f(x+1)$

A)
y

D) $2 \cdot f(x)$

$$f(x) = 2x - 1$$

E) $f(x) = 2x$

$$f(x) = 2x - 1 \text{ y B)}$$

13. g (Mackenzie-SP) Se a curva dada é o gráfico da função

$$y = a + b \cdot x, \text{ então o valor de } a \text{ é } x \text{ O } x$$

$$y \text{ C) } y$$

$$3$$

$$O \ x$$

$$g$$

$$D)$$

$$y$$

$$-1 \text{ O } 2 \ x$$

$$O \ g \ x$$

A) D) 4 E) 1 y g

$$2$$

$$B) \sqrt{3} \ 1$$

$$E)$$

$$4$$

$$C) 2 \text{ O } x$$

16. (UFMG) Considere a função $y = f(x)$, que tem como

SEÇÃO ENEM

domínio o intervalo $\{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 3\}$ e que se anula

3 01. (Enem–2009) A suspeita de que haveria uma relação

somente em $x = -2$ e $x = 3$, como se vê nesta figura:

2 causal entre tabagismo e câncer de pulmão foi levantada pela primeira vez a partir de observações clínicas. Para $f(x)$

testar essa possível associação, foram conduzidos inúmeros estudos epidemiológicos. Entre esses, houve o estudo do número de casos de câncer em relação ao número de cigarros consumidos por dia, cujos resultados 1 são mostrados no gráfico a seguir:

Casos de câncer pulmonar dado o número de

3 cigarros consumidos diariamente

–2 2 60

–1 0 50 1 1 2 3 x 40 30 1 2 20 2 10 pulmonar 0

Casos de câncer 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

Assim, para quais valores reais de x se tem $0 < f(x) \leq 1$?

Centers of Disease Control and Prevention CDC-EIS. Summer

A) $\{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 2\}$ De acordo com as informações do gráfico,

$\{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 2\}$ A) o consumo diário de cigarros e o número de casos

de câncer de pulmão são grandezas inversamente

B) $\{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 2\}$ proporcionais. 3

$\{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 2\}$ B) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que não se

$\{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < 3\}$ **MATEMÁTICA**

C) o consumo diário de cigarros e o número de casos

C) $\{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 2\}$ proporcionais. 2 D) uma pessoa não fumante certamente nunca será $\{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < 3\}$ de câncer de pulmão são grandezas diretamente

diagnosticada com câncer de pulmão.

D) $\{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 2\}$ E) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que estão

relacionadas, mas sem proporcionalidade.

17. 02. (Enem–2010) Nos processos industriais, como na (UNESP)
Uma pessoa parte de carro de uma cidade X

indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos
com destino a uma cidade Y. Em cada instante t

capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas
(em horas), a distância que falta percorrer até o destino

situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve
é dada, em dezenas de quilômetros, pela função D, ser controlado,
para garantir a qualidade do produto final

definida por e a economia no processo. Em uma indústria de
cerâmica,

$$D(t) = 4t^2 - 1 \text{ do tempo de acordo com a}$$

$$\text{função } D(t) = 4t^2 - 1 \text{ o forno é programado para}$$

$$\text{elevar a temperatura ao longo } t + 7 \text{ } \backslash$$

Considerando o percurso da cidade X até a cidade Y, 5 T t () = {
| 7 t + 20, para 0 ≤ < t 100

a distância, em média, por hora, que o carro percorreu foi 2 2 16 | t
– t + 320, para t 1 ≥ 100 | \ 125 5

A) 40 km. em que T é o valor da temperatura atingida pelo forno,

B) 60 km. em graus Celsius, e t é o tempo, em minutos, decorrido

desde o instante em que o forno é ligado. Uma peça deve

C) 80 km. ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48 °C

e retirada quando a temperatura for 200 °C. O tempo de

D) 100 km.

permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a

E) 120 km. A) 100 B) 108 C) 128 D) 130 E) 150

Frente C Módulo 03

03. (Enem–2002) O excesso de peso pode prejudicar o

desempenho de um atleta profissional em corridas

GABARITO

de longa distância como a maratona (42,2 km),

a meia-maratona (21,1 km) ou
 uma prova de 10 km. **Fixação** Para saber
 uma aproximação do intervalo de tempo a mais

perdido para completar uma corrida devido ao excesso

de peso, muitos atletas utilizam os dados apresentados 01. C

na tabela e no gráfico.

02.
E

**Altura peso (Kg) ideal para atleta masculino de
 ossatura grande, 03. C (m) corredor de longa distância**

1,57 56,9 04. A 1,58 57,4

05.
A

1,59 58,0

1,60 58,5 **Propostos**

□ □

(Modelo Wilmore e Behnke) **Tempo x Peso** 01. E

Tempo perdido 02. C Maratona (minutos)

03. B

1,33

Meia-maratona 04. E

0,67 Prova de 10 Km 05. D 0,62

1 06. D Peso acima do ideal (kg)

Usando essas informações, um atleta de ossatura grande, 07. B
pesando 63 kg e com altura igual a 1,59 m, que tenha corrido
uma meia-maratona, pode estimar que, em condições de 08. D
peso ideal, teria melhorado seu tempo na prova em 09. C

A) 0,32 minuto.

B) 0,67 minuto. 10. C

C) 1,60 minuto. 11. A

D) 2,68 minutos.

12.
A

E) 3,35 minutos.

04. (Enem–2010) Um laticínio possui dois reservatórios de leite.

Cada reservatório é abastecido por uma torneira acoplada a 14. D
um tanque resfriado. O volume, em litros, desses reservatórios 15. E
depende da quantidade inicial de leite no reservatório e do
tempo t , em horas, em que as duas torneiras ficam abertas. 16. A
Os volumes dos reservatórios são dados pelas funções

17.
C

$$V_1(t) = 250t^3 - 100t + 3\,000 \text{ e } V_2(t) = 150t^3 + 69t + 3\,000.$$

Depois de aberta cada torneira, o volume de leite de **Seção**
Enem

um reservatório é igual ao do outro no instante $t = 0$ e,
também, no tempo t igual a 01. E

A) 1,3 h.

02.
D

B) 1,69 h.

C) 10,0 h. 03. E

D) 13,0 h. 04. A

E) 16,9 h.

MÓDULO FRENTE Função afim 04 C

INTRODUÇÃO 2º) y

r

Chamamos de função polinomial do primeiro grau,
ou

função afim, a toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, em que $f(x) = ax + b$, sendo **a** e **b** números reais e $a \neq 0$. O gráfico de uma função afim é uma reta.

O x

Na função $f(x) = ax + b$, temos:



O coeficiente angular é dado por $a = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$.



i) O número **a** é chamado coeficiente angular,



inclinação ou declividade. OBSERVAÇÃO



ii) O número b é chamado coeficiente linear. Quando o ângulo de inclinação é obtuso, temos que sua

tangente
é
negativa.

exemplos

1º) $y = 3x + 5$ 3º) $y = -8x$ Assim, para $a < 0$, a função é decrescente.

2º) $f(x) = -4x + 17$ 4º) $f(x) = x - 5$

3º) r contém os pontos $P = (4, 5)$ e $Q = (7, 7)$.

CÁLCULO DO COEFICIENTE ANGULAR

$y r Q 7$

ângulo formado pela reta e pelo eixo x , tomado no sentido $P \alpha 5$ O coeficiente angular a é definido como a tangente do anti-horário. Esse ângulo é chamado de ângulo de inclinação. 3

exemplo α

Calcular o coeficiente angular da reta r em cada caso. O 4 7 x

1º) y O ângulo de inclinação é indicado na figura por a .

r Assim, temos $a = \operatorname{tg} a$.

Logo, a tangente do ângulo a pode ser calculada no triângulo retângulo indicado.

$$30^\circ \quad 2 \quad 2$$

O Daí, $\operatorname{tg} x a = \frac{2}{3}$, ou seja, $a = \frac{2}{3}$

O coeficiente angular é dado por $a = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
OBSERVAÇÃO . 3

OBSERVAÇÃO Sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ dois pontos que pertencem a AB

ao gráfico de uma função afim. O coeficiente angular a é

Quando o ângulo de inclinação é agudo, temos que

sua

dato
por:

tangente é positiva.

Assim, para $a > 0$, a função é crescente. $a =$
 $y_B - y_A$ variação em y Δy $D \rightarrow$
ou, então, $a =$, em que $x_B - x_A$ Δx
variação em x



Editora Bernoulli 39





Frente C Módulo 04

ESBOÇO DO GRÁFICO OBSERVAÇÃO

Considere uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

Para esboçarmos o gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da $f(x) = ax + b$. Se $b = 0$, a função é chamada função linear,

forma $y = ax + b$, é conveniente conhecermos os pontos de e seu gráfico é uma reta passando pela origem do sistema

interseção desse gráfico com os eixos coordenados.

de
coordenad

i) Interseção da reta com o eixo Oy

exemplo

Fazendo $x = 0$, temos $y = a \cdot 0 + b = b$. Logo, o ponto

de interseção da reta com o eixo Oy é dado pelo
Esboçar o gráfico da função linear $y = 3x$. ponto
(0, b).

ii) Interseção da reta com o eixo Ox y **Resolução:**

Fazendo $y = 0$, temos $0 = ax + b$, ou seja, $x = -\frac{b}{a}$.

a

Esse valor é chamado **raiz** ou **zero** da função.

O x

Portanto, o ponto de interseção da reta com o eixo

Ox é dado por $\left(-\frac{b}{a}, 0 \right)$

Marcando esses pontos no sistema de coordenadas

ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO

cartesianas, temos: **DO 1º GRAU**

$a > 0$ (função crescente) Estudar o sinal de uma função $f(x)$ significa descobrir os

y valores de x para os quais $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$ ou $f(x) > 0$.

b Como exemplo, tomemos o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

em que
 $y = ax + b$,
 com $a > 0$.

b O x y

—

a b

$a < 0$ (função decrescente)

y b O x

a

b Observe que — é o ponto no qual a função é nula,

O x b ou seja, é uma raiz. Para valores de x menores do que

— a raiz, os valores correspondentes de y são negativos.

a Já para valores de x maiores do que a raiz, os valores

exemplo correspondentes de y são positivos.

Indicamos esses

Construir o gráfico da função f: resultados no esquema a seguir: $\square \rightarrow \square$, em que $f(x) = 4x + 8$.

Resolução:

+

Temos $a = 4$ e $b = 8$.

— b x

O número **b** indica a ordenada do ponto de

interseção da –

a

reta com o eixo Oy. Logo, esse ponto é igual a $(0, 8)$.

O número b Os sinais – e + representam os sinais de y para o intervalo – indica a abscissa do ponto de interseção a de x considerado.

da reta com o eixo Ox. Temos: – = – = –2. Logo, esse Analogamente, com $a < 0$, observamos que, para valores a b 8

4

ponto é igual a $(-2, 0)$. de x menores do que a raiz, os valores correspondentes de

y são positivos. Já para valores de x maiores do que a raiz,

Marcando esses pontos em um sistema de coordenadas os valores correspondentes de y são negativos. Indicamos

cartesianas, basta uni-los para obter o esboço da reta. esses resultados no esquema a seguir:

y y

$(0, 8)$

b +

$$(-2, 0) \quad O \quad b \quad x \quad b \quad x \quad - \quad - \quad - \quad a \quad a \quad O \quad x$$

40 Coleção Estudo

Função afim

RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES 02. o
custo C de produção de x litros de certa substância é dado por uma
função afim, com $x \geq 9$, cujo gráfico está **DO 1º GRAU**
representado a seguir:

$C(x)$

exemplo

520

Resolver cada inequação a seguir: 400

1º) $3x - 7 > 0$

O 8 x (litros)

Resolução:

$3x > 7$ Nessas condições, quantos litros devem ser produzidos de
 $x > \Rightarrow 3$ modo que o custo de produção seja igual a R\$ 580,00?

2º) Conjunto solução (S): $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \}$

Resolução: Uma função afim é da forma $C(x) = ax + b$. Do
gráfico, $x = 4 \Rightarrow C(4) = 2 \times 4 - 5 = 3$ temos que $C(0) = 400$. Mas, $C(0) = b$.
Logo, $b = 400$.

Sabemos que $C(8) = a \cdot 8 + b = 520$. Substituindo o valor

Resolução:

de **b**, temos $8a + 400 = 520 \Rightarrow 8a = 120 \Rightarrow a = 15$.

$x - 4 \leq 6x - 15 \Rightarrow -5x \leq -11$ Portanto, o custo de produção é dado por $C(x) = 15x + 400$.

Multiplicando os dois membros por -1 , temos:

Fazendo $C(x) = 580$, temos:

$$11 \quad 15x + 400 = 580 \Rightarrow 15x = 180 \Rightarrow x = 12$$

$$5x \geq 11 \Rightarrow x \geq$$

5 Portanto, devem ser produzidos 12 litros.

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5 \}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS 01. (UFMG)

Em 2000, a porcentagem de indivíduos brancos

MATEMÁTICA

na população dos Estados Unidos era de 70% e de outras

01. *etnias – latinos, negros, asiáticos e outros – constituíam*

Encontrar a expressão matemática e fazer um esboço do

os 30% restantes. Projeções do órgão do Governo

gráfico da função afim que contém os pontos $A = (1, 7)$

norte-americano encarregado do censo indicam que,

e $B = (-3, -1)$.

em 2020, a porcentagem de brancos deverá ser de 62%.

Resolução:

NEWSWEEK INTERNATIONAL, 29 abr. 2004.

A expressão geral da função afim é dada por $y = ax + b$.

Admite-se que essas porcentagens variam linearmente

Substituindo as coordenadas dos pontos **A** e **B**, temos o

sistema linear: $\begin{cases} a + b = 7 \\ -3a + b = -1 \end{cases}$ afirmar que os brancos serão minoria na população $\downarrow$ com o tempo. Com base nessas informações, é

CoRRReTo

$\begin{cases} a + b = 7 \\ -3a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -3a + b = -1$ norte-americana a partir de

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 2$ e $b = 5$. Portanto, A) 2050 B) 2060 C) 2070 D) 2040

a expressão da função é $y = 2x + 5$. Para esboçarmos o seu

gráfico, é necessário encontrar as suas interseções com **02.** (UNESP–2007) A unidade usual de medida para a energia

os eixos coordenados. Fazendo $x = 0$, temos que $y = 5$. contida nos alimentos é kcal (quilocaloria). Uma fórmula

Fazendo $y = 0$, temos que $x = -2,5$ aproximada para o consumo diário de energia (em kcal) – (raiz). Portanto, os 2 para meninos entre 15 e 18 anos é dada pela função $f(x) = 2x + 5$ pontos $(0, 5)$ e $(-2,5, 0)$, 0 indicam as interseções com os eixos Ox e Oy . $f(h) = 17h$, em que h indica a altura em cm e, para meninas

eixos Oy e Ox , respectivamente. nessa mesma faixa de idade, pela

função $g(h) = (15,3)h$.

Paulo, usando a fórmula para meninos, calculou seu

Esboço do gráfico:

consumo diário de energia e obteve 2 975 kcal. Sabendo-se

y

que Paulo é 5 cm mais alto que sua namorada Carla (e que

ambos têm idade entre 15 e 18 anos), o consumo diário de

5 energia para Carla, de acordo com a fórmula, em kcal, é

A) 2 501 D) 2 875

– 5 O x B) 2 601 E) 2 970

2 C) 2 770

Editora Bernoulli 41

Frente C Módulo 04

03. (UFRGS–2006) Considere o gráfico a seguir, que apresenta

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

a taxa média de crescimento anual de certas cidades em

função do número de seus habitantes. **01.** (Cesgranrio)

O valor de um carro novo é de R\$ 9 000,00 e,

com 4 anos de uso, é de R\$ 4 000,00. Supondo que o

l preço caia com o tempo, segundo uma linha reta, o
valor

4,8% de um carro com 1 ano de uso é

A) R\$ 8 250,00. D) R\$ 7 500,00.

B) R\$ 8 000,00. E) R\$ 7 000,00.

C)

R\$

7

750,00.

xa média de

Ta 0,9% **02.** (UFES) Uma produtora pretende lançar um filme em fita crescimento anua

O 100 500 1 000 n° de mil habitantes fixo de produção do filme foi R\$ 150 000,00, e o custo de vídeo e prevê uma venda de 20 000 cópias. O custo

por unidade foi de R\$ 20,00 (fita virgem, processo de

A partir desses dados, pode-se afirmar que a taxa

copiar e embalagem). Qual o preço **MíNiMo** que deverá

média de crescimento anual de uma cidade que possui

ser cobrado por fita, para não haver prejuízo?

750 000 habitantes é

A) R\$ 20,00 C) R\$ 25,00 E) R\$ 35,00

A) 1,95%. D) 3,00%.

B) R\$ 22,50 D) R\$ 27,50

B) 2,00%. E) 3,35%.

C) 2,85%. **03.** (PUC Minas) Uma função do 1º grau é tal que $f(-1) = 5$

e $f(3) = -3$. Então, $f(0)$ é igual a

04. A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) -1 (PUC Minas) O gráfico da função $f(x) =$

$ax + b$ está

representado na figura. **04.** (UFV-MG) Uma função f é dada por $f(x) = ax + b$, em

y que a e b são números reais. Se $f(-1) = 3$ e $f(1) = -1$,

então
 $f(3)$
é o
número

1 A) 1 B) 3 C) -3 D) 5 E) -5

05. (UFRGS) O ônibus X parte da cidade A com velocidade

-2 O x constante de 80 km/h, à zero hora de certo dia.

Às 2 horas da madrugada, o ônibus Y parte da mesma

A) -1 2 constante de 100 km/h. O ônibus Y vai cruzar com o 3 B)
C) D) 2 ônibus X , pela manhã, às 5 O valor de $a + b$ é cidade, na
direção e sentido do ônibus X , com velocidade

2

05. (PUC-SP-2009) O prefeito de certa cidade solicitou a uma B) 8
horas. D) 11 horas. A) 6 horas . C) 10 horas. E) 12 horas.

equipe de trabalho que obtivesse uma fórmula que lhe

permitisse estudar a rentabilidade mensal de cada
um dos **06.** (UFMG) Observe o gráfico, em que o segmento AB é

ônibus de uma determinada linha. Para tal, os membros paralelo ao
eixo das abscissas.

da equipe consideraram que havia dois tipos de gastos – Absorção
uma quantia mensal fixa (de manutenção) e o custo do (mg/dia)

combustível – e que os rendimentos seriam calculados A B 18 multiplicando-se 2 reais por quilômetro rodado. A tabela

a seguir apresenta esses valores para um único ônibus

de tal linha, relativamente ao mês de outubro de 2008. O 20 Ingestão

(mg/dia)

outubro

Esse gráfico representa a relação entre a ingestão de certo

Quantia fixa (reais) 1 150

composto, em mg/dia, e sua absorção pelo organismo,

Consumo de combustível (litros/100 km) 40 também em mg/dia. A única afirmativa **FAlsa** relativa Custo de 1 litro de combustível (reais) ao gráfico é: 4

Rendimentos/km (reais) A) Para ingestões de até 20 mg/dia, a absorção é 2

proporcional à quantidade ingerida.

Distância percorrida (km) x

B) A razão entre a quantidade absorvida e a quantidade

Considerando constantes os gastos e o rendimento, a **MeNoR** ingerida é constante.

quantidade de quilômetros que o ônibus deverá percorrer no C) Para ingestões acima de 20 mg/dia, quanto maior

mês para que os gastos não superem o rendimento é a ingestão, menor a porcentagem absorvida do

compo
ingerid

A) 2 775 D) 2 900

D) A absorção resultante da ingestão de mais de

B) 2 850 E) 2 925 20 mg/dia é igual à absorção resultante da ingestão

C) 2 875 de 20 mg/dia.

42 Coleção Estudo

Função afim

07. (PUC-Campinas-SP) Durante um percurso de x km, **10.** (UFG–2009) Para fazer traduções de textos para o inglês,

um veículo faz 5 paradas de 10 minutos cada uma. Se um tradutor A cobra um valor inicial de R\$ 16,00 mais

a velocidade média desse veículo em movimento é de R\$ 0,78 por linha traduzida, e um outro tradutor, B,

60 km/h, a expressão que permite calcular o tempo, em cobra um valor inicial de R\$ 28,00 mais R\$ 0,48 por linha

horas, que ele leva para percorrer os x km é traduzida. A quantidade **MiNiMA** de linhas de um texto

A) 6 a ser traduzido para o inglês, de modo que o custo seja $x + 5$ 6 $x + 5$ 50 C) E) $x +$ menor se for realizado pelo tradutor B, é 6 120 6 A) 16 B) 28 C) 41 D) 48 E) 78 $x + 50$ x B) D) $+ 50$ 60 60 **11.** (UFU-MG) O proprietário de um restaurante deseja

estimar seus gastos no fornecimento de refeições.

08. (PUC-Campinas-SP–2008) O gráfico a seguir representa Para isso, ele divide o gasto total em duas partes: gasto

o crescimento de uma planta durante um certo período fixo e gasto por cliente. Se seu gasto total, quando

de tempo. 30 clientes estão se alimentando, é de R\$ 240,00 e de

R\$ 400,00 com 70 clientes, **DeTeRMiNe** o gasto fixo e

o gasto por cliente desse proprietário.

15

(cm) **12.** (UNIRIO-RJ-2008) O gráfico a seguir representa o ra 10 percentual de iluminação de um teatro em relação à Altu iluminação máxima da sala, durante um espetáculo de

2 horas de duração. Observe que esse espetáculo começa

e termina sem iluminação e que, passados sete minutos

O 60 120 Tempo (dias) do início da peça, a iluminação atinge um determinado

percentual e fica constante por um período. Além disso,

Esse crescimento pode ser representado pela função f

destaca-se que o percentual de iluminação é de 5%, um

definida por

minuto após o início da peça e, também, três minutos

A) $f(t) = \begin{cases} t & \text{antes do seu término. Durante quanto tempo o} \\ \text{percentual, se } 0 \leq t < 60 \end{cases}$ || de iluminação ficou constante nesse espetáculo? $6 \begin{cases} t & \text{o} \\ - 5, & \text{se } 60 \leq \leq t < 120 \end{cases}$ | 12

, se $0 \leq \leq t < 60$

|| | t **MATEMÁTICA**

$$B) f(t) = \begin{cases} 6 & | & t + 5, \text{ se } 60 < t \leq 120 \end{cases}$$

12 % de iluminação 5

$$C) f(t) = \begin{cases} t & | & 0 \leq t \leq 60 \\ 6 & | & 60 < t \leq 120 \end{cases}$$

A) 55 min D) 1 h 32 min t | , se 60 < t ≤ 120 B) 1 h 09 min E) 1 h 39 min | 12

$$C) 1 \text{ h } 22 \text{ min}$$

$$D) f(t) = \begin{cases} 6t & | & \text{se } 0 \leq t < 60 \end{cases}$$

13. (PUC-Campinas-SP) A seguir, vê-se parte de um gráfico

$$E) f(t) = \begin{cases} \text{que mostra o valor } y \text{ a ser pago (em reais) pelo uso de } 1 \\ t + , \text{ se } 0 \leq t < 60 \\ \text{um estacionamento por um período de } x \text{ horas.} \\ 6 \end{cases}$$

51 | t + , se 60 ≤ t ≤ 120 | 12 6,5

09. (Cesgranrio) Uma barra de ferro com temperatura inicial 5

de -10 °C foi aquecida até 30 °C. O gráfico a seguir)

representa a variação da temperatura da barra em função 3,5

do tempo gasto nessa experiência. Calcule em quanto

tempo, após o início da experiência, a temperatura da y (reais 2

barra atingiu 0 °C.

a (°C) 0 1 2 3 4 x (horas)

30

Suponha que o padrão observado no gráfico não se altere

atur

quando x cresce. Nessas condições, uma pessoa que
estacionar o seu carro das 22 horas de certo dia até as
Temper 5 –10 Tempo (min) 8 horas e 30 minutos do dia seguinte
deverá pagar

A) 1 min A) R\$ 12,50. D) R\$ 17,00. D) 1 min e 15 s

B) 1 min e 5 s E) 1 min e 20 s B) R\$ 14,00. E) R\$ 18,50.

C) 1 min e 10 s C) R\$ 15,50.

Editora Bernoulli 43

Frente C Módulo 04

14. (UFMG) Observe a figura. **16.** (Unip-SP) Admitindo que em uma determinada localidade

D uma empresa de táxi cobra R\$ 2,00 a bandeirada e C

R\$ 2,00 por quilômetro rodado, e outra empresa cobra

E R\$ 3,00 por quilômetro rodado e não cobra bandeirada,

20 m determine o número de quilômetros rodados num táxi

F da empresa que não isenta a bandeirada, sabendo que x m o preço
da corrida apresentado é de R\$ 30,00.

10 m

A) 10 km C) 6 km E) 22 km

A B B) 18 km D) 14 km 12 m

O retângulo ABCD representa um terreno, e o trapézio **17.** (Mackenzie-SP) O gráfico esboçado, da função

sombreado, uma construção a ser feita nele. Por exigências $y = ax + b$, representa o custo unitário de produção de

legais, essa construção deve ter uma área, no mínimo, uma peça em função da quantidade mensal produzida.

igual a 45% e, no máximo, igual a 60% do terreno. Todos Para que esse custo unitário seja R\$ 6,00, a produção

os valores **possíveis** de x pertencem ao intervalo mensal deve ser igual a

A) [17, 26] o

B) [13, 18] 10

C) [14, 18]

D) [18, 26] Custo unitári 5

15. (UFJF-MG) Para desencorajar o consumo excessivo O 720 1 020

de água, o Departamento de Água de certo município Quantidade produzida

aumentou o preço desse líquido. O valor mensal pago

A) 930 B) 920 C) 940 D) 960 E) 980

em reais por uma residência, em função da quantidade

de metros cúbicos consumida, é uma função cujo

gráfico **18.** (CEFET-MG-2010) Os sistemas de pagamento A e B de uma

é a poligonal representada a seguir: dívida de R\$ 15 000,00, a ser paga em 300 meses, estão

representados, de modo aproximado, pelo gráfico a seguir,

R\$

em que o eixo das abscissas representa o tempo, em meses,

34,70 e o das ordenadas, o valor de prestação em cada mês.

P

150

16,70

11,70

115 A

4,70

10 20 25 30 m³ 50 B

De acordo com o gráfico, quanto ao pagamento relativo ao consumo mensal de água de uma residência, é **CoRRReTo** O 300 t

afirmar que, se o consumo Considerando-se a área sob esse gráfico uma boa

aproximação do total a ser pago, é **iNCoRRReTo** afirmar

A) for nulo, a residência estará isenta do pagamento.

que
a(o)

B) for igual a 5 m³, o valor pago será menor do que se

A) prestação em A é constante.

o consumo for igual a 10 m³.

B) prestação em B é decrescente.

C) for igual a 20 m³, o valor pago será o dobro do que

C) total a ser pago em **B** é maior que em **A**.

se o consumo for igual a 10 m³.

D) prestação em **B** torna-se menor que em **A** a partir do

D) exceder 25 m³, o valor pago será R\$ 16,70 acrescido mês 105.

de R\$ 3,60 por m³ excedente.

E) total a ser pago em **B** será, aproximadamente, o dobro

E) for igual a 22 m³, o valor pago será R\$ 15,00. do valor da dívida contraída.

44 Coleção Estudo

Função afim

SEÇÃO ENEM 03. (Enem–2010) As sacolas plásticas sujam florestas, rios e oceanos e quase sempre acabam matando por asfixia **01.** (Enem–2009) Um experimento consiste em colocar certa peixes, baleias e outros animais aquáticos. No Brasil, em

quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com 2007, foram consumidas 18 bilhões de sacolas plásticas.

água até certo nível e medir o nível da água, conforme Os supermercados brasileiros se preparam para acabar

ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, com as sacolas plásticas até 2016. Observe o gráfico

concluiu-se que o nível da água é em função do número de a seguir, em que se considera a origem como o ano

bolas de vidro que são colocadas dentro do copo. de 2007.



y



O 9 Nº de anos (após 2007)



O quadro a seguir mostra alguns resultados do



LUCENA, M. Guerra às sacolinhas. *Galileu*. nº 225, 2010.



experimento realizado.



De acordo com as informações, quantos bilhões de sacolas



Número de bolas (x) Nível da água (y) plásticas serão consumidos em 2011?



5 6,35 cm A) 4,0



10 6,70 cm B) 6,5

15 7,05 cm C) 7,0 **MATEMÁTICA**

Disponível em: . D) 8,0

Acesso em: 13 jan. 2009 (Adaptação).

E)
10,0

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível

da água **y** em função do número de bolas **x**? **04.**
(Enem–2010) O gráfico mostra o número de favelas

A) $y = 30x$ D) $y = 0,7x$ no município do Rio de Janeiro entre 1980 e 2004,

B) $y = 25x + 20,2$ E) $y = 0,07x + 6$ considerando que a variação nesse número entre os anos

C) $y = 1,27x$ considerados é linear.

02. 750 (Enem–2008) A figura a seguir representa o boleto de



573



cobrança da mensalidade de uma escola, referente ao



mês de junho de 2008.



372



Banco S.A.



Vencimento



Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento. 30/06/2008 Cedente Agência / cód. cedente Escola de Ensino Médio



Data documento Nosso número 1980 1992 2004 02/06/2008



Uso do Banco (=) Valor documento



R\$ 500,00 ÉPOCA. Favela tem memória. nº 621, 12 abr. 2010
(Adaptação).



Instruções (–) Descontos

Observação: no caso de pagamento em atraso, cobrar multa (-) Outras deduções Se o padrão na variação do período 2004 / 2010 se de R\$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.

(+) Mora / Multa mantiver nos próximos 6 anos, e sabendo que o número

(+) Outros acréscimos de favelas em 2010 é 968, então o número de favelas

(-) Valor cobrado

em
2016
será

Se $M(x)$ é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, A) menor que 1 150.

em que x é o número de dias em atraso, então B) 218 unidades maior que em 2004.

A) $M(x) = 500 + 0,4x$ D) $M(x) = 510 + 40x$ C) maior que 1 150 e menor que 1 200.

B) $M(x) = 500 + 10x$ E) $M(x) = 500 + 10,4x$ D) 177 unidades maior que em 2010.

C) $M(x) = 510 + 0,4x$ E) maior que 1 200.

Frente C Módulo 04

05. (Enem–2010) Certo município brasileiro cobra a conta

de água de seus habitantes de acordo com o gráfico a seguir.

GABARITO

O valor a ser pago depende do consumo mensal em m^3 .

R\$ Conta de água **Fixação**

25 01. A

02.
B

15

10 03. C

04.
C

O 10 15 20 m^3

05.
C

Se um morador pagar uma conta de R\$ 19,00, isso Propostos significa que

ele consumiu

A) 16 m³ de água. D) 19 m³ de água.

01.

C

B) 17 m³ de água. E) 20 m³ de água.

C) 18 m³ 02. D de água.

06. 03. C (Enem–2010) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para 04. E montar fi guras, onde cada lado foi representado por um 05. C canudo. A quantidade de canudos (C) de cada fi gura 06. B depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada fi gura. A estrutura de formação das fi guras está 07. B representada a seguir. 08. B

09.

D

Figura I 10. C Figura II Figura III

Que expressão fornece a quantidade de canudos em 11. Gasto fi xo = R\$ 120,00

função da quantidade de quadrados de cada fi gura?

Gasto por cliente = R\$ 4,00

A) $C = 4Q$ D) $C = Q + 3$

12.

D

B) $C = 3Q + 1$ E) $C = 4Q - 2$

C) $C = 4Q - 1$ 13. D

07. 14. A (Enem–2007) O gráfico a seguir, obtido a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção.

17.
D

461

18.
C

Seção Enem

239 01. E

Número de espécies 02. C

ameaçadas de extinção 1983 1987 1991 1995 1999 2003 2007
ano 03. E

Se mantida, pelos próximos anos, a tendência de crescimento mostrada no gráfico, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a 05. B

A) 465 D) 538 06. B

B) 493 E) 699 07. C

C) 498

46 Coleção Estudo MATEMÁTICA

MÓDULO FRENTE Semelhança de triângulos 03 D

SEMELHANÇA DE FIGURAS

OBSERVAÇÕES

PLANAS i) Indicamos a semelhança pelo símbolo ($\sim$).

ii) Lados opostos a ângulos congruentes são chamados

A ideia de semelhança de figuras planas é uma das mais

de lados homólogos.

importantes da Geometria. Dizemos que duas figuras planas

são semelhantes quando possuem a mesma forma.

iii) A razão entre dois lados homólogos (k) é a razão de

exemplos semelhança.

1º) Dois quadrados quaisquer sempre são semelhantes.

H G CASOS DE SEMELHANÇA

D C DE TRIÂNGULOS

Vimos que dois triângulos são semelhantes se, e
somente se,

A possuem os três ângulos congruentes e os três lados
B E F

proporcionais. Porém, para verifi carmos se dois
triângulos são

2º) Dois triângulos são semelhantes quando seus
lados semelhantes, não é necessário conferir todas
essas condições.

têm medidas proporcionais.

F A seguir, enunciamos os casos de semelhança, que
C são alguns grupos de condições capazes de garantir a

2 cm

4 cm 4 cm 8 cm semelhança dos triângulos.

A B D E 3 cm 6 cm **Caso AA (ângulo, ângulo)**

Definição:

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois



Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, ângulos respectivamente congruentes.



i) os ângulos são congruentes.



ii) os lados opostos a ângulos congruentes são



proporcionais.



A

D

A

$$B C E F B E \} \equiv \mid$$

$$\mid \mid A D \equiv C F \equiv \mid \mid \{ \} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

$$D A B B C A C A B C \sim D D E F \Leftrightarrow \{ B E \equiv e = = \mid D E E F \\ D F \mid C F \equiv \mid$$

Editora Bernoulli 47

Frente D Módulo 03

Caso 1A1 (lado, ângulo, lado) Razão entre áreas

A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois é dada pelo quadrado da razão de semelhança entre eles.

lados respectivamente proporcionais e se os ângulos formados

Demonstr

por esses lados forem congruentes.

Consideremos que $D A B C \sim D D E F$.

A A

D D

H h h

B C E F B C E F

$$\begin{aligned} & \frac{DE}{AB} = \frac{BC}{H} = \frac{EF}{h} = \frac{BC}{H} \quad \text{I} \\ & \frac{BC}{H} = \frac{BC}{H} \quad \text{II} \\ & \frac{BC}{H} = \frac{BC}{H} \quad \text{III} \end{aligned}$$

Portanto, de (I), (II) e (III), temos que:

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm os **Caso III (lado, lado, lado)** $\frac{BC}{H} = \frac{BC}{H} = \frac{EF}{h} = k$ 2 três lados respectivamente proporcionais.

$$A S_{ABC} = k^2 S_{DEF}$$

B EXERCÍCIO RESOLVIDO C E F

AB 01. Na figura, sabe-se que E e B são congruentes, $\frac{BC}{AC} = \frac{BC}{AC} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$ $AD = 7$ cm, $AE = 5$ cm, $ED = 4$ cm e $AB = 10$ cm. $\frac{DE}{EF} = \frac{DE}{DF}$

A razão de semelhança de dois triângulos é a razão entre 7 e

as medidas de dois segmentos correspondentes (lados, 10 alturas, medianas, etc.). 4

D

Considere os triângulos semelhantes ABC e ADE.

A B y C

A) Determinar $AC = x$ e $BC = y$.

AQ e AP são alturas. B) Determinar a razão entre as áreas dos triângulos ADE

AM e AN são medianas. e do quadrilátero BCED.

D Resolução: E N P A) Os triângulos ADE e ABC são semelhantes, pois os

ângulos E e B são congruentes, e o ângulo A é comum aos dois triângulos (caso AA). Então:

$$B C \times 10 y M Q = = \Leftrightarrow x = 14 \text{ cm e } y = 8 \text{ cm}$$

A razão de semelhança do triângulo ABC para o triângulo B) Seja A a área do triângulo ADE. A razão entre as áreas

ADE é o número k, tal que: 2 de ADE e de ABC é $K 1 A =$.

Assim, $\frac{ADE}{K_2} = \frac{1}{4} = \frac{A}{4} = \frac{ABC}{4}$



$k \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AQ} = \frac{AM}{Ent\tilde{a}o, A} = \frac{=}{=}$
 $= \frac{ABC}{ADE} = \frac{4ADE}{4A} = 4A$ e $\frac{AB}{BCED} = 3A$, como mostrado
 $\frac{AD}{AE} = \frac{DE}{AP} = \frac{AN}{na\ f\i\ gura\ a\ seguir:}$



48 Coleção Estudo



Semelhança de triângulos

A EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

5

7 x A E A r **01.** (UFMG) Observe esta fi gura.

4 B

D 3 A θ O

B y C Q

Portanto, $\triangle ADE \cong \triangle CBA$ por B.C.D.

Nessa figura, os segmentos AB e BC são perpendiculares,

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

respectivamente, às retas r e s . Além disso, $AP = PB$,

$BQ = QC$ e a medida do ângulo POQ é q . Considerando-se essas informações, é **CoRReTo** afirmar que a medida do

Definição: ângulo interno AOC do quadrilátero AOCB é



Se a razão de semelhança entre dois triângulos é $k = 1$, A) $2q$ C) $3q$



os triângulos são chamados congruentes e possuem 5 3 B) q D) q
i) os ângulos congruentes. 2 2

ii) os lados homólogos congruentes.



A **02.** (UNESP) Um observador situado em um ponto **o**, D localizado na margem de um rio, precisa determinar

sua distância até um ponto **p**, localizado na outra margem, sem atravessar o rio. Para isso, marca, com estacas, outros pontos do lado da margem em que se

B C E F entre si, e **p**, **A** e **C**, também.

Além disso, **OA** é paralelo a

MATEMÁTICA encontra, de tal forma que **p**, **o** e **B** estão alinhados

$\Delta \text{ } \left\{ \begin{array}{l} BC, OA = 25 \text{ m}, BC = 40 \text{ m e } OB = 30 \text{ m, conforme fi} \\ \text{gura. } AD \equiv AB \text{ } DE \equiv \text{ } || \text{ } ABC \equiv \Delta DEF \Leftrightarrow \text{ e } P \left\{ \right. \\ BE \equiv AC \text{ } DF \equiv \text{ } | \text{ } CF \equiv BC \text{ } EF \text{ } \backslash \text{ } | \text{ } \equiv \text{ Rio } OA \end{array} \right.$

BASE MÉDIA DE TRIÂNGULO _{B C}

Sejam o triângulo ABC e os pontos médios **M** e **N** dos

A distância, em metros, do observador em **O** até o

lados AB e AC, respectivamente.

ponto
p é

A

A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

03. (FUVEST-SP) O triângulo ABC tem altura **h** e base **b**

M N (ver figura). Nele, está inscrito o retângulo DEFG, cuja

base é o dobro da altura. Nessas condições, a altura do

retângulo, em função de **h** e **b**, é dada pela fórmula

B C

A

Os triângulos AMN e ABC são semelhantes pelo caso LAL,

e a razão de semelhança é $k = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Logo, $MN = k \cdot BC$, $\frac{AM}{AB} = k$, $\frac{AN}{AC} = k$

e, conseqüentemente,

MN // BC. O segmento MN é chamado base média do triângulo

b

ABC e, esquematicamente, temos:

bh bh bh

A) C) E)



MN é base média do triângulo ABC | $MN = \frac{1}{2} BC \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1) h b + h \\ + 2b^2(h b +) \end{array} \right]$



$\left\{ \begin{array}{l} 2) 2bh bh B) D) MN // \\ BC \parallel h b + 2 h b + \end{array} \right.$



Editora Bernoulli 49

Frente D Módulo 03

04. (UEL-PR) Após um tremor de terra, dois muros paralelos **03.**
(UFOP-MG–2008) Uma pessoa, após caminhar 10,5 metros

em uma rua de uma cidade ficaram ligeiramente sobre uma rampa plana com inclinação de q radianos, em

abalados. Os moradores se reuniram e decidiram escorar relação a um piso horizontal, e altura de h metros na sua

os muros utilizando duas barras metálicas, como mostra parte mais alta, está a 1,5 metro de altura em relação ao

a figura a seguir. Sabendo que os muros têm alturas de piso e a 17,5 metros do ponto mais alto da rampa.

9 m e 3 m, respectivamente, a que altura do nível

do chão as duas barras se interceptam? Despreze a m

espessura das barras. 17,5

A) 1,50 m m h

10,5 1,5 m

B) 1,75 m θ

C) 2,00 m 9 m Assim, a altura h da rampa, em metros, é de

D) 2,25 m A) 2,5 B) 4,0 C) 7,0 D) 8,5 3 m

E) 2,50 m

04. (UNESP) A sombra de um prédio, em um terreno plano,

05. numa determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse mesmo

(FUVEST-SP) Um lateral l faz um lançamento para um

instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de

atacante A , situado 32 m à sua frente em uma linha

altura
5
m

paralela à lateral do campo de futebol. A bola, entretanto, segue uma trajetória retilínea, mas não paralela à lateral, Sol e quando passa pela linha de meio do campo está a uma distância de 12 m da linha que une o lateral ao atacante. Sabendo-se que a linha de meio do campo está à mesma Prédio distância dos dois jogadores, a distância **MÍNIMA** que o Poste atacante terá que percorrer para encontrar a trajetória

5

da bola será de

A) 18,8 m. 3 15 A

B) 19,2 m. A altura do prédio, em metros, é

D) 20,0 m. 32 m C) 19,6 m. 12 m A) 25 B) 29 C) 30 D) 45 E) 75

E) 20,4 m. **05.** (UFRN) Considerando-se as informações constantes no

triângulo PQR (figura a seguir), pode-se concluir que a

L altura PR desse triângulo mede

3

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 3

4

- 01.** 3 (UFV-MG) Depois de andar 5 m em uma escada rolante, uma pessoa percebeu que se deslocou 4 m em relação P Q à horizontal. Tendo andado 10 m na mesma escada, A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 quantos metros terá se deslocado em relação à vertical?
- A) 5 B) 8 C) 9 D) 6 E) 7
- 06.** (UNESP) Na figura, **B** é um ponto do segmento de reta A C, e os ângulos DAB, DBE e BCE são retos.

02. (VUNESP) O triângulo ABC da figura é equilátero.

Os pontos **M** e **N** e os pontos **p** e **Q** dividem os lados a D que pertencem em três segmentos de reta de mesma medida. Nessas condições, **Calcule E**

A

N A C B

Se o segmento $AD = 6$ dm, o segmento $AC = 11$ dm e

M

o segmento $EC = 3$ dm, as medidas **possíveis** de AB, em dm, são

B P Q C A) 4,5 e 6,5 D) 7 e 4

A) a medida do ângulo M PQ (vértice **p**). B) 7,5 e 3,5 E) 9 e 2

B) a medida do ângulo BMQ (vértice **M**). C) 8 e 3

07. (FUVEST-SP) Na figura a seguir, as distâncias dos pontos **10.**

(FUVEST-SP) No triângulo acutângulo ABC, a base AB

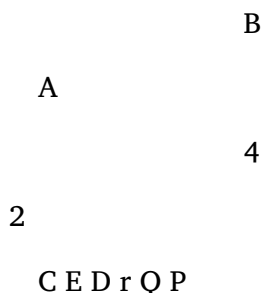
A e B à reta r valem 2 e 4. As projeções ortogonais de C em r mede 4 cm, e a altura relativa a essa base também

A e B sobre essa reta são os pontos C e D. Se a medida CD mede 4 cm. MNPQ é um retângulo, cujos vértices M e N

de CD é 9, a que distância de C deverá estar o ponto e , pertencem ao lado AB, p pertence ao lado BC e Q,

do segmento CD, para que $CEA = DEB$? ao lado AC. O perímetro desse retângulo, em cm, é

C



A) 3 D) 6 A B M N

B) 4 E) 7

C) 5 A) 4

B)
8

08. (UFMG) Na figura a seguir, o quadrado ABCD está C) 12

inscrito no triângulo AMN, cujos lados AM e AN medem, D) 14
respectivamente, m e n . E) 16

M 11. (UFMG) Observe a figura.

B C A

E D

A N D MATEMÁTICA

Então, o lado do quadrado mede B C F

A) $m n m n + 4$ C) Nela, $AB = 8$, $BC = 12$ e BFDE é um losango inscrito no $m n + 4$ triângulo ABC. A medida do lado do losango é

$m 2 2 + n m n$ A) 4

B) D)

8 2 B) 4,8

C)
5

09. (Fatec-SP) Na figura a seguir, o triângulo ABC é retângulo D) 5,2 e isósceles, e o retângulo nele inscrito tem lados que

medem 4 cm e 2 cm. 12. (UFC) Na figura a seguir, os triângulos ABC e AB'C' são

B semelhantes. Se $AC = 4AC'$, então o perímetro de AB'C', dividido pelo perímetro de ABC, é igual a

A

B'

M N

A C B

O perímetro do triângulo MBN é C

A) 8 cm. 1 1 A) D) B) 12 cm. 8 2

C) 1 (8 + ¹2) cm. B) E) 1 6 D) (8 + 2 ¹2) cm. 1 C) E) 4 (2 + ¹2) cm. 4

Editora Bernoulli 51

Frente D Módulo 03

13. (PUC-SP) Os triângulos ABC e AED, representados na **16.** (UFF-RJ) Um prédio com a forma de um paralelepípedo

figura a seguir, são semelhantes, sendo o ângulo ADE retângulo tem 48 m de altura. No centro da cobertura

congruente ao ângulo ACB. desse prédio e perpendicularmente a essa cobertura, está

A instalado um para-raios. No ponto Q sobre a reta r – que passa pelo centro da base do prédio e é perpendicular ao

D segmento MN –, está um observador que avista somente E uma parte do para-raios (ver a figura). A distância do

chão aos olhos do observador é 1,8 m, e o segmento

$PQ = 61,6$ m. O comprimento da parte do para-raios que

B C o observador **NÃO** consegue avistar é

Se $BC = 16$ cm, $AC = 20$ cm, $AD = 10$ cm e $AE = 10,4$ cm,

o perímetro do quadrilátero BCED, em centímetros, é

A) 32,6

B) 36,4

C) 40,8 48 m

N

D) 42,6

E) 44,4 M P Q r

16 m

14. (Mackenzie-SP) Na figura a seguir, se $AB = 5AD = 5FB$, A) 16 m.

a razão vale B) 12 m. FG

DE

C)
8
m.

A

D)
6
m.

α

D E E) 3 m.

α **17.** (UNESP) Um homem sobe em uma escada de 5 metros de
F G comprimento, encostada em um muro vertical. Quando

α

B ele está em um degrau que dista 3 metros do pé da C
escada, esta escorrega, de modo que a extremidade A

A) 3 5 se desloca para a direita, conforme a seta da figura a D) 2
seguir, e a extremidade B desliza para baixo, mantendo-se

B) 4 7 aderente ao muro. E) 2

C) 5 B

15. (UFRGS) Para estimar a profundidade de um poço com

1,10 m de largura, uma pessoa cujos olhos estão a 1,60 m

do chão posiciona-se a 0,50 m de sua borda. Dessa h

forma, a borda do poço esconde exatamente seu fundo, A

como mostra a figura. Com os dados anteriores, a pessoa x

conclui que a profundidade do poço é

1,10 m eNCoNTRe a fórmula que expressa a distância h, do

1,60 m degrau em que está o homem até o chão em função da

distância x, do pé da escada ao muro.

0,50 m

18. (UNESP) Um obelisco de 12 m de altura projeta, num certo momento, uma sombra de 4,8 m de extensão. **Calcule** a distância máxima que uma pessoa de 1,80 m de altura

A) 2,82 m. C) 3,30 m. poderá se afastar do centro da base do obelisco, ao longo

B) 3,00 m. D) 3,52 m. da sombra, para, em pé, continuar totalmente na sombra.

52 Coleção Estudo

Semelhança de triângulos

19. (UFMG) Observe a figura. **23.** (AFA-SP) Na figura a seguir, o perímetro do triângulo

D equilátero ABC é 72 cm, M é o ponto médio de AB e

C

CE = 16 cm. Então, a medida do segmento CN, em cm, é um sétimo de

A

A B M

N

Nessa figura, os segmentos AD e BC são paralelos, $AD = 8$,

$AB = 3$ e $BC = 7$. Sendo p o ponto de interseção das B C E

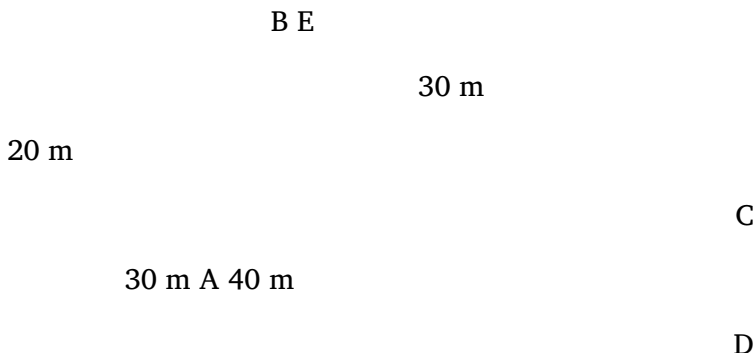
retas AB e DC, a medida do segmento BP é A) 48 B) 49 C) 50 D) 51

A) 23 B) 22 C) 24 D) 21

24. (UFMG) Nesta figura, os ângulos ABC, CDE e EAB

20. (UFPE) Qual o número inteiro mais próximo do comprimento são retos, e os segmentos AD, CD e BC medem,

do segmento AB indicado na figura a seguir? respectivamente, **x**, **y** e **z**.



21. (UFMG–2009) Uma folha de papel quadrada, ABCD, que mede 12 cm de lado, é dobrada na reta **r**, como mostrado

A B

na figura a seguir:

A Nessa situação, a altura do triângulo ADE, em relação ao D r lado AE , é dada por

$$E A) x z^2 - y^2 y z^2 - y^2 C)$$

y N

MATEMÁTICA

z

$$B) x^2 z^2 - y^2 z^2 - y^2 D) z y$$

25. (UFU-MG–2007) Na figura a seguir, ABC é um triângulo

BC e suas medianas AP, BN e CM medem, respectivamente,

8 cm, 10 cm e 4 cm. Se BQ é paralelo ao lado AC com

Feita essa dobra, o ponto D sobrepõe-se ao ponto N,

2.BQ = AC, então o perímetro do triângulo APQ é igual a

e o ponto A, ao ponto médio M, do lado BC. É **CoRReTo**

afirmar que, nessas condições, o segmento CE mede A

A) 7,2 cm.

B) 7,5 cm. Q N M

C) 8,0 cm.

D) 9,0 cm. B C P

22. A) 24 cm. B) 22 cm. C) 20 cm. D) 18 cm.

(FUVEST-SP) Na figura a seguir, o lado de cada quadrado

da malha quadriculada mede 1 unidade de comprimento.

DE SEÇÃO ENEM

Calcule a razão .

BC

A **01.** (Enem–1998) A sombra de uma pessoa que tem

1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento,

F a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m.

E

Se, mais tarde, a sombra do poste diminuiu 50 cm,

D C a sombra da pessoa passou a medir

A) 30 cm. C) 50 cm. E) 90 cm.

B

B) 45 cm. D) 80 cm.

Editora Bernoulli 53

Frente D Módulo 03

02. (Enem–2009) A fotografia mostra uma turista **04.** (Enem–2010)
Em canteiros de obras de construção civil

aparentemente beijando a esfinge de Gizé, no Egito. é comum
perceber trabalhadores realizando medidas de

A figura a seguir mostra como, na verdade, foram comprimento e de
ângulos e fazendo demarcações por

posicionadas a câmera fotográfica, a turista e a esfinge. onde a obra
deve começar ou se erguer. Em um desses

canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano.



Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas

foram indicadas por letras.

B

Internet.

da

M

obtida P fia

Fotogra A C

N

Posição

da esfinge A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria

Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

Posição A) à mesma área do triângulo AMC.

da turista

B) à mesma área do triângulo BNC.

d'

Posição C) à metade da área formada pelo triângulo ABC.

da câmera d D) ao dobro da área do triângulo MNC.

E) ao triplo da área do triângulo MNC.

c

a

^b GABARITO

Medindo-se com uma régua diretamente na fotografia,

verifica-se que a medida do queixo até o alto da cabeça

Fixação

2

da turista é igual a da medida do queixo da esfinge

3 01. A 02. E 03. D 04. D 05. B

até o alto da sua cabeça. Considere que essas medidas na

realidade são representadas por d e d' , respectivamente,

Propostos

que a distância da esfinge à lente da câmera fotográfica,

localizada no plano horizontal do queixo da turista e da 01. D 13. E

esfinge, é representada por b , e que a distância da turista 02. A) 120° 14. B

à mesma lente, por a . A razão entre b e a será dada por

B) 90° 15. D

A) $= b d' b 2d' D) =$

03. B 16. D

$a c a 3c$

04. A 17. $h = \sqrt{25 - x^2}$ 3

B) $5 = b$, com $0 < x < 5$ 2 d b 2' d

E) $=$

$a 3c a c$ 05. B 18. 4,08 m

C) $b 3d'$ 06. E 19. D $= a 2 c$ 07. A 20. 24

03. 08. A 21. C (Enem–2009) A rampa de um hospital tem, na sua parte

mais elevada, uma altura de 2,2 metros. Um paciente, 09. E 22. 2

ao caminhar sobre a rampa, percebe que se deslocou 3

3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. 10. B 23. A

A distância, em metros, que o paciente ainda deve 11. B 24. B

caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é

12. C 25. B

A) 1,16 metro.

B) 3,0 metros. **Seção Enem**

C) 5,4 metros.

D) 5,6 metros. 01. B 02. D 03. D 04. E

E) 7,04 metros.

54 Coleção Estudo MATEMÁTICA

MÓDULO FRENTE Teorema de Tales

04 D e quadriláteros

TEOREMA DE TALES

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Considere três retas paralelas **a**, **b**, **c** “cortadas” por
duas **Trapézios**

transversais **r** e **s**.

Os trapézios são os quadriláteros que possuem dois
lados

r e **s** paralelos, chamados bases.

A B C D

a

B AD // BC E

b A D

C F

c O quadrilátero ABCD é um trapézio de bases AD e BC.

Classificação

Pelo Teorema de Tales, temos que a razão entre segmentos

correspondentes nas duas transversais é constante, isto é: **Trapézio isósceles:** Os lados não paralelos são

congruentes ($AB \equiv CD$), e os ângulos das bases são congruentes ($\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{C}$).



$\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{DE}$

$\frac{BC}{CD} = \frac{EF}{DF}$

AD // BC

TEOREMA DA BISSETRIZ_{A D}

Trapézio retângulo: Um de seus lados é perpendicular

Em qualquer triângulo, uma bissetriz interna divide o lado às bases ($\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$).
oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

B C

A

AD // BC

c b A D

Trapézio escaleno: Os lados não paralelos não são
B x y congruentes, e nenhum ângulo interno é reto.

S C

a B C

AD // BC

AB ≠ CD



x y =

$$c b A \neq B \neq C \neq D$$

A D

Editora Bernoulli 55

Frente D Módulo 04

Paralelogramos Quadrados

Os paralelogramos são os quadriláteros que possuem os lados opostos paralelos. Os quadrados são os paralelogramos que possuem todos

os lados opostos paralelos. os lados e ângulos congruentes.

B B C C

M AB // CD

AD M // BC

A D

propriedades

A D

i) Os lados opostos são paralelos e congruentes.

Todo quadrado é um paralelogramo, um retângulo e

ii) Os ângulos opostos são congruentes. um losango; portanto, para ele, são válidas todas as

iii) Os ângulos consecutivos (propriedades vistas para esses quadriláteros. como A e D)

são

suplementares, ou seja, somam 180° . Podemos representar os conjuntos dos quadriláteros

notáveis
pelo
seguinte
esquema.

iv) As diagonais se cortam ao meio, ou seja, **M** é ponto

médio dos segmentos AC e BD. P R L

Retângulos _Q

Os retângulos são os paralelogramos que possuem todos

os ângulos retos.

B C **p**: Conjunto dos paralelogramos

R:
Conjunto
dos
retângulos

M l: Conjunto dos losangos

Q:
Conjunto
dos
quadrados

A D

Além das propriedades válidas para os
paralelogramos, **BASE MÉDIA DE
TRAPÉZIO**

temos que os retângulos possuem as diagonais
congruentes.

Seja MN um segmento com extremidades nos pontos
médios

Losangos dos lados não paralelos de um trapézio
ABCD. Então:

Os losangos são os paralelogramos que possuem
todos i) MN é paralelo às bases AB e CD.

os lados congruentes. ii) MN é igual à semissoma das
bases.

B

D C

M N

A C

A B

D



são perpendiculares e são bissetrizes dos ângulos internos Além das propriedades de paralelogramo, suas diagonais $\left\{ \begin{array}{l} AB \parallel DC + MN = e \\ MN \text{ é base média do trapézio } ABCD \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \mid MN \parallel AB \parallel CD \end{array} \right\}$ do paralelogramo.





Teorema de Tales e quadriláteros

Demonstração: EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Prolongamos DN até encontrar o prolongamento de AB.

D 01. Três terrenos têm frentes para a rua **A** e para a rua **B**, C

conforme a figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua **A**. Qual a medida de frente para a rua **B** de cada lote, M N sabendo-se que a frente total para essa rua é 120 m?

Rua A

40 30 20

A B E

Na figura, os triângulos DCN e NBE são congruentes, pois

possuem os ângulos congruentes e $CN \equiv NB$ (caso ALA).

Então, $BE \equiv CD$ e $NE \equiv DN$. Rua B

Como MN é base média do triângulo ADE, então:

02. (UFMG) Sobre figuras planas, é **CoRReTo** afirmar que

$MN \parallel AB \parallel CD$ e $MN = \frac{AE + BE}{2} + \frac{AB + CD}{2} =$
= A) um quadrilátero convexo é um retângulo, se os lados opostos têm comprimentos iguais.

B) um quadrilátero que tem suas diagonais perpendiculares

é um quadrado.



LEITURA COMPLEMENTAR C) um trapézio que tem dois ângulos consecutivos



congruentes é isósceles.



D) um triângulo equilátero é também isósceles.



escalas termométricas



E) um triângulo retângulo é aquele cujos ângulos são retos.

A escala Celsius adota, sob pressão normal, o valor



0 (zero) para a temperatura de fusão do gelo e o valor

MATEMÁTICA



03. (UFU-MG) Em um quadrilátero ABCD, o ângulo C é igual a

100 (cem) para a temperatura sob a qual a água entra em ebulição.

Na escala Fahrenheit, são atribuídos os valores 32 (trinta e 1 B do ângulo , o ângulo A mede o quíntuplo do ângulo C 3 dois) e 212 (duzentos e doze) a essas temperaturas de fusão e o ângulo D vale 45°. Pode-se dizer que $A - B$ vale



e ebulição, respectivamente. Os símbolos °C e °F indicam



A) 50° C) 70° E) 90°



graus Celsius e graus Fahrenheit, respectivamente. Aplicando



B) 60° D) 80°

o Teorema de Tales, podemos transformar medidas de uma dessas escalas para a outra; por exemplo, para transformar 75°C em $^{\circ}\text{F}$. (PUC Minas) Um trapézio isósceles, de 12 cm de altura,

tem bases medindo 4 cm e 6 cm. Unindo-se os pontos

médios de seus lados, obteremos um quadrilátero cujo

perímetro mede

100 $^{\circ}\text{C}$ M M' A) 20 cm. C) 26 cm. 212 $^{\circ}\text{F}$

N N' x B) 24 cm. D) 30 cm.

75 °C 120 50

100 40 80 30 20 60 **05.** (UNESP–2008) Uma certa propriedade rural tem o formato

40 0 10 de um trapézio, como na fi gura. As bases WZ e XY do 20 –10 trapézio medem 9,4 km e 5,7 km, respectivamente, e o

0 –20

0 °C P –20 –30 lado YZ margeia um rio. –40 –40 –50 P' –609,4 km –60 32 °C W Z



b



Termômetro graduado nas escalas Fahrenheit e Celsius 2b rio



$$NP = M P \quad '' \quad 100 \quad 0 - 212 \quad 32 - x \Rightarrow = \Rightarrow = 167 \text{ (figura fora de escala) } N P \quad MP \quad 5,7 \text{ km } X Y$$



$$'' \quad 75 \quad 0 - x - 32$$



Se o ângulo $X Y Z$ é o dobro do ângulo $X W Z$, a medida,

Logo, 75°C equivalem a 167°F . em km, do lado YZ, que fi ca à margem do rio, é

A) 7,5 B) 5,7 C) 4,7 D) 4,3 E) 3,7

Editora Bernoulli 57

Frente D Módulo 04

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 05. (Cesgranrio)

As retas r_1 , r_2 e r_3 são paralelas, e os comprimentos dos segmentos de transversais são os

indicados na figura. Então, x é igual a

01. CALCULE m na figura, $r \parallel s \parallel t$.

$$6 \text{ r } x \text{ 1 r } 15 \text{ r } m_2 \text{ 15 } 3$$

$$4 \text{ s } 10 - m \text{ r } 3$$

t 1 8 A) 4 D) 5 5

02. 1 (PUC-Campinas-SP-2007) Na figura a seguir, as retas r , B) 5 E)

6 5 s e t são paralelas entre si.

C)
5

A D G **06.** (UFV-MG–2007) Sob duas retas paralelas de uma cidade, serão

r

construídos, a partir das estações **A** e **B**, passando pelas

B E H

estações **C** e **D**, dois túneis retilíneos, que se encontrarão

C F I na estação **X**, conforme ilustra a figura a seguir: s

t

Se $AC = x$, $BC = 8$, $DE = 15$, $EF = x - 10$, $GI = y$ e 1 túnel 2

$HI = 10$, então $x + y$ é um número túnel C D

A) maior que 47. 1,5 km D) quadrado perfeito. rua 2

B) entre 41 e 46. 1 km E) cubo perfeito.

A B rua 1

C) menor que 43.

A distância entre as estações A e C é de 1 km e entre

03. Na figura, **Calcule** os valores de x e y , respectivamente, as estações B e D, de 1,5 km. Em cada um dos túneis,

sendo são perfurados 12 m por dia. Sabendo que o túnel 1 BS a bissetriz interna do ângulo B .

demandará 250 dias para ser construído e que os túneis

C

deverão se encontrar em X, no mesmo dia, é **CoRReTo**

afirmar que o número de dias que a construção do túnel 2

x 15 deverá anteceder à do túnel 1 é

9 S A) 135 B) 145 C) 125 D) 105 E) 115

y

07. (Unicamp-SP) A figura a seguir mostra um segmento

A B dividido em três partes: $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm e 12 AD

$CD = 5$ cm. O segmento AD' mede 13 cm, e as retas BB'

04. e CC' são paralelas a DD'. **DeTeRMiNe** os comprimentos

(Cesgranrio) No triângulo ABC da figura, CD é a bissetriz

do ângulo interno em C. Se $AD = 3$ cm, $DB = 2$ cm e C dos segmentos AB' , $B'C'$ e $C'D'$.

$AC = 4$ cm, então B C D BC mede A

C B' C'

D'

08. (FGV-SP-2008) Na figura, ACB é reto, $ABD = DBC = \alpha$,

A $AD = x$, $DC = 1$ e $BC = 3$. Com as informações dadas, B D **DeTeRMiNe** o valor de x .

A) 3 cm. 8 A D) cm. 3 x

5

B) cm. E) 4 cm. D

2

$\alpha 1$

C) cm. B C 3 7 α

2

58 Coleção Estudo

Teorema de Tales e quadriláteros

09. Uma reta paralela ao lado BC de um triângulo ABC **15.**
(Cesgranrio) No quadrilátero ABCD da figura, são traçadas

determina sobre o lado as bissetrizes AB segmentos de 3 cm e de CM e BN, que formam entre si o ângulo a.

12 cm. **Calcule** as medidas dos segmentos que essa A soma dos ângulos internos A e D desse quadrilátero

reta determina sobre o lado AC corresponde a , cuja medida é 10 cm.

D N C

10. (VUNESP) Na figura, o triângulo ABD é reto em B,

e $\hat{\alpha}$ AC é a bissetriz de B AD. Se $AB = 2 \cdot BC$, fazendo $BC = b$ M

e $CD = d$, então A

A) $d = b$ D B

B) $d = 5$ A) α C) a E) $3a$ b 4 2 α C B) D) 2 a 5 C) $d = b$ 2 3

6 16. (FUVEST-SP) No retângulo a seguir, o valor, em graus, de

D) $d = b$ 5 a + A b é B

E) $d = 5$ β b 40°

4

11. $\hat{A}$ A bissetriz interna do ângulo A de um triângulo ABC divide

o lado oposto em dois segmentos que medem 9 cm e α

16 cm. Sabendo que AB mede 18 cm, **DeTeRMiNe** a A) 50 C) 120 E) 220

medida de AC. B) 90 D) 130

12. (PUC-Campinas-SP) Considere as afirmações:

I – Todo retângulo é um paralelogramo. **17.** (FUVEST-SP) Um trapézio retângulo tem bases 5 e 2 e

II – Todo quadrado é um retângulo. altura 4. O perímetro desse trapézio é **MATEMÁTICA**

III – Todo losango é um quadrado. A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Associe a cada uma delas a letra **v**, se for **veRDADe**i**RA**, **18.** (PUC-Campinas-SP) Na figura a seguir, tem-se representado

ou **F**, caso seja **FAl**s**A**. Na ordem apresentada, temos

o losango ABCD, cuja diagonal menor mede 4 cm.

A) F F F. D) V V F.

A

B) F F V. E) N.d.a.

C) V F F. 20

B 0 D

13. (UFMG) O retângulo a seguir, de dimensões **a** e **b**, está

decomposto em quadrados. Qual o valor da razão $\frac{a}{b}$?

a A medida do lado desse losango, em centímetros, é

A) $6\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

b B) 6 D) 4

19. (UNIFESP) Em um paralelogramo, as medidas de dois

A) 5 ângulos internos consecutivos estão na razão 1:3. 2 3 1 B) C) 2
D) E) O ângulo **MeNoR** desse paralelogramo mede 3 3 2 2

A) 45° B) 50° C) 55° D) 60° E) 65°

14. (UFV-MG) Em um trapézio isósceles de bases diferentes,

uma diagonal é também bissetriz de um ângulo
adjacente **20.** (FGV-SP-2006) Uma folha de papel retangular
dobrada

à base maior. Isso significa que

A) os ângulos adjacentes à base menor não são períméto. No
entanto, se dobrada em três partes iguais congruentes. ao meio no
comprimento e na largura fica com 42 cm de

no comprimento e em duas partes iguais na largura, fica

B) a base menor tem medida igual à dos lados oblíquos. com 34 cm
de períméto. O módulo da diferença das

C) as diagonais se interceptam formando ângulo reto. dimensões
dessa folha é

D) a base maior tem medida igual à dos lados oblíquos. A) 12 cm.
C) 9 cm. E) 6 cm.

E) as duas diagonais se interceptam no seu ponto médio. B) 10 cm.
D) 8 cm.

Editora Bernoulli **59**

Frente D Módulo 04

SEÇÃO ENEM 04. (Enem–2010) A loja Telas &

Molduras cobra 20 reais por metro quadrado de tela, 15 reais por metro linear de **01.** (Enem–2000) Um marceneiro deseja construir uma moldura, mais uma taxa fixa de entrega de 10 reais.

escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais Uma artista plástica precisa encomendar telas e molduras

baixo e o mais alto tenham larguras, respectivamente, a essa loja, suficientes para 8 quadros retangulares

iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme a figura. (25 cm x 50 cm). Em seguida, fez uma segunda

30 encomenda, mas agora para 8 quadros retangulares (50 cm x 100 cm). O valor da segunda encomenda será

A) o dobro do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.

B) maior do que o valor da primeira encomenda, mas

não
o
dobro.

C) a metade do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.

60

D) menor do que o valor da primeira encomenda, mas

Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear não a metade.

de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, deve ser E) igual ao valor da primeira encomenda, porque o custo

A) 144 B) 180 C) 210 D) 225 E) 240 de entrega será o mesmo.

02. (Enem–2010) O jornal de certa cidade publicou em uma

página inteira a seguinte
divulgação de seu caderno
GABARITO de classifi cados.

26 mm **Fixação**

4% 160 80 01. m, 40 m e m

x mm outros 3 3

jornais 02. D

03.
C

04.
C

96% 05. E

Pessoas que consultam
400 mm Propostos nossos
classificados

01.
m
=
4
ou
m
=
6

02.
B

03.

x

=

5

e

y

=

4

04.

D

05.

E

260 mm 06. C

Para que a propaganda seja fi dedigna à porcentagem 07. $AB' = 2,6$ cm

da área que aparece na divulgação, a medida do $B'C' = 3,9$ cm

lado do retângulo que representa os 4%, deve ser de $C'D' = 6,5$ cm

aproximadamente

A) 08. 5

1 mm. C) 17 mm. E) 167 mm. 4

B) 10 mm. D) 160 mm. 09. 2 cm e 8 cm

03. 10. C

(Enem–2010) Para confeccionar, em madeira, um cesto de lixo que comporá o ambiente decorativo de uma sala 11. $x = 32$ cm ou $x = 81$

de aula, um marceneiro utilizará, para as faces laterais, 8 12. D cm

retângulos e trapézios isósceles e, para o fundo, um 17. D

quadrilátero, com os lados de mesma medida e ângulos 13. A 18. D

retos. Qual das fi guras representa o formato de um cesto 14. B 19.

A

que possui as características estabelecidas? 15. D 20. E

16.
D

A) C) E) **Seção Enem**

B) 01. D 02. D 03. C 04. B D)

60 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Funções soma e fatoração 05 E

SEN (A ± B) E COS (A ± B) Da mesma forma, para todo x , tem-se:

Observe-se que: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin (30^\circ + 60^\circ) \neq \sin 30^\circ + \sin 60^\circ$, pois $1 \neq$
+

.

2 2 De fato:

Assim, $\sin (a + b) \neq \sin a + \sin b$.

$$\cos 2x = \cos (x + x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x$$

Fórmulas = $\cos^2 x - \sin^2 x$

exemplos

Quaisquer que sejam os valores de **a** e **b**, valem as seguintes identidades: 1º) $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

i 2º) $\cos 20^\circ = \cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ$ $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$

ii $\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$ $\pi \pi \pi$
3º) $\cos = \cos^2 - \sin^2$

iii $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

exemplo iv $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$
 $\pi \pi$ 4º) $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$

Observamos que, ao utilizarmos a relação fundamental

Calcular $\sin 75^\circ$.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, podemos obter duas outras fórmulas

Resolução:

para
 $\cos 2x$,
que

são:

Como $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$, tem-se:

$$\sin 75^\circ = \sin (45^\circ + 30^\circ) \Rightarrow \cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$$

$$\sin 75^\circ = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow$$

$$\sin 75^\circ = \frac{2}{2} \cos 2x = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 - \sqrt{3} + 1}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

SEN 2X E COS 2X TG (A ± B)

Observe-se que $\tan (30^\circ + 120^\circ) \neq \tan 30^\circ + \tan 120^\circ$,
pois:

Para todo x, tem-se:

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{3} \\ &\neq -\frac{3}{3} \end{aligned}$$



$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$



De fato: Assim, $\tan (a + b) \neq \tan a + \tan b$.



$$\sin 2x = \sin (x + x) = \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x$$

$$\text{Fórmulas} = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

exemplos π i) Sendo a, b e $a + b \neq + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
tem-se: 2

$$1^\circ) \sin 4x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x$$

$$2^\circ) \tan a + \tan b \sin 20^\circ = 2 \cdot \sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ \tan (a + b) = 1 - \tan a \cdot \tan b$$

$$3^\circ) \sin \pi \sin \pi \sin \pi = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} \text{ Demonstração:}$$

$$4^\circ) \sin (a + b) \sin x = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a \sin x = 2 \cdot \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{x}{2} \sin \frac{a+b}{2}$$

Frente E Módulo 05

Dividindo-se o numerador e o denominador por $\cos a \cdot \cos b$, A partir delas, é possível concluir que:

tem-se:

$$\frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b} \text{ i) } \frac{\sin(a + b)}{\cos a \cos b} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b}$$

$$\frac{\sin(a + b)}{\cos a \cos b} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b}$$

$$\frac{\sin(a + b)}{\cos a \cos b} \text{ ii) } \frac{\sin(a + b) - \sin(a - b)}{\cos a \cos b} = \frac{2 \sin b \cos a}{\cos a \cos b}$$

—

$$\frac{\sin(a + b)}{\cos a \cos b} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b}$$

$$\text{iii) } \cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b$$

$$\frac{\sin(a + b)}{\cos a \cos b} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b}$$

$$\frac{1 - \tan a \tan b}{1 + \tan a \tan b} \text{ iv) } \frac{\cos(a + b) - \cos(a - b)}{\sin a \sin b} = \frac{-2 \sin a \sin b}{\sin a \sin b}$$

ii) π Sendo a, b e $a - b \neq + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, tem-se: 2 Essas fórmulas transformam somas e diferenças em



$\frac{\sin(a - b)}{\sin a \sin b} = \frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{\sin a \sin b}$ produtos. Para facilitar o seu uso, convém escolher novas $\frac{\sin(a - b)}{\sin a \sin b} = \frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{\sin a \sin b}$

$1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b$ variáveis p e q , tal
que $a + b = p$ e $a - b = q$.

A demonstração é análoga à anterior. Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2x = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q}{1 - \operatorname{tg} p \operatorname{tg} q} \Rightarrow a = p \text{ e } b = q \\ \operatorname{tg} 2x = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q}{1 + \operatorname{tg} p \operatorname{tg} q} \Rightarrow a = p \text{ e } b = q \end{cases}$$

Seja x e $2x \in \mathbb{R}$. Assim, as fórmulas ficam: $\operatorname{tg} 2x = \frac{\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q}{1 - \operatorname{tg} p \operatorname{tg} q}$,
 $k \in \mathbb{Z}$, tem-se: $2x = p + q + 2k\pi$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q}{1 - \operatorname{tg} p \operatorname{tg} q} = \frac{\frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} + \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q}}{1 - \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} \cdot \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q}} = \frac{\operatorname{sen} p \cos q + \operatorname{sen} q \cos p}{\cos p \cos q - \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q} = \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos(p-q)}$$

Demonstração: $\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} - \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q} = \frac{\operatorname{sen} p \cos q - \operatorname{sen} q \cos p}{\cos p \cos q} = \frac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos(p-q)}$

$$\text{ii } \operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$2 \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x+x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\text{exemplos } \text{i } 1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = \frac{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \frac{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \frac{\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} = \frac{\cos(a-b)}{\cos(a-b)}$$

$$\cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$1^\circ) \frac{2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}}{\cos p - \cos q} = -2 \frac{\sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}}{1 - \cos p} = -2 \frac{\sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}}{2 \sin^2 \frac{p}{2}} = -\frac{\sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}}{\sin^2 \frac{p}{2}}$$

x

$$2^\circ) 2 \cdot \cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ = \cos 10^\circ \cdot \cos 10^\circ + \cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 10^\circ \cdot \cos 40^\circ + \cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ + \cos 10^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 10^\circ \cdot \cos 70^\circ + \cos 10^\circ \cdot \cos 80^\circ + \cos 10^\circ \cdot \cos 90^\circ$$

FATORAÇÃO DA SOMA E DIFERENÇA DE TANGENTES

$$\begin{aligned} \text{DIFERENÇA DE SENOS} & \quad \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ \text{DIFERENÇA DE COSSENOS} & \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q + \sin q \cos p}{\cos p \cos q} = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q} \end{aligned}$$

A fatoração de uma expressão é um recurso muito importante para a simplificação de frações, bem como

importante para a simplificação de frações, bem como

para

a resolução de equações e de inequações. Assim, sendo p e $q \neq +kp$, $k \in \mathbb{Z}$, tem-se: 2

Dedução de fórmulas $\sin(p \pm q)$ $\tan p + \tan q =$

Sejam as fórmulas: $\cos p \cos q$



$$\bullet \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a;$$



Analogamente, demonstra-se que:

$$\bullet \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a;$$



$$\bullet \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b; \sin(p \pm q)$$



$$\tan p - \tan q =$$

$$\cos p \cos q$$

$$\bullet \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Funções soma e fatoração

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (FUVEST-SP) Nos triângulos retângulos da figura, **01.** (FUVEST-SP) No quadrilátero ABCD, em que os ângulos

$AC = 1$ cm, $BC = 7$ cm, $AD = BD$. Sabendo que B e D são retos e os lados têm as medidas indicadas,

$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$, o valor de $\sin x$ é o valor de $\sin A$ é

D B

X

2x

C

C

A x

x 2x

D

A B

5 2

A) 2 4 5 5 D) A) D)

2 5

2 5 1

B) E)

B) E) 7 1 5 2

350 50 4 C) 5

C)

5 **02.** (FUVEST-SP) O valor de $(\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{cotg} 10^\circ) \cdot \operatorname{sen} 20^\circ$ é

02. 1 5 (Unifor-CE) O valor da expressão A) B) 1 C) 2 D) E) 4

π 2 2 π

$\cos x \cdot \cos y + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$, para $x = e$ e $y =$, é

5 30

A) 1 **03.** (UFSM-RS) O valor da expressão $4 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x$, D) $1/2$ para $x = \frac{\pi}{6}$ é

MATEMÁTICA B) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$ A) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$

C) $2/2 - 1$ E) $2/2$

03. (FUVEST-SP) O valor de $(\sin 22^\circ 30' + \cos 22^\circ 30')^2$ C) 0 é

A) 3 **04.** (FUVEST-SP) Se $\cos x = \frac{3}{4}$, então $\cos x$ vale D) $\frac{1}{2}$ A) $-\frac{3}{4}$

B) $2 + \frac{3}{8}$ E) $2/2$

2

3/32

B) E)

C) $2 + \frac{2}{8}$

2

14

C)

04. 4 (UFJF-MG) Sendo $x + y = 60^\circ$, o valor de

$(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 - 2$ é **05.** (UFTM-MG-2008) Se $\sin x + \cos x = e$ e $\sin 2x = -$,

A) -2 D) 1 π com $\leq x < p$ e $n > 0$, então n é igual a 2 1 B)
 – E) 2 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5 2

C) 0

06. 4 (Mackenzie-SP) Se $\sin x = e$ e $\operatorname{tg} x < 0$, então $\operatorname{tg} 2x$ vale

5

05. 1 24 (UFC) Se $\sin x + \cos x =$, então o valor de $\sin 2x$ é 8 A)
 D) 3 7 3

A) 2 1 24 4 – C) B) – E) – 3 3 7 3

B) – 1 2 8 D) C) –

3 3 3

Editora Bernoulli **63**

Frente E Módulo 05

07. (PUC Rio) Se $\operatorname{tg} 3x = 4$, então $\operatorname{tg} 6x$ é igual a **14.** (FGV-SP–
 2009) Seja ABCD um quadrado, e p e Q pontos

3 médios de BC e CD, respectivamente. Então, $\sin b$ é

A) 8 D) – igual a 4

B) -8 B P C 5 E) 15 8

3

C)

4 Q

08. (UFSJ-MG) Se $\operatorname{cosec} q = -\sqrt{5}$, então o valor de $\cos 2q$ é β A) 0,4 C) $\sqrt{5}$

B) $-0,5$ D) 0,6 A D

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$

09.) A) B) C) D) E)

(PUC Minas) A expressão é igual a $\frac{5}{5} \frac{5}{5} \frac{5}{6}$

$\cos \alpha \cdot \cos \beta$

A) $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$

15. (FUVEST-SP-2010) A figura representa um quadrado

B) $\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b$

C) $\sec a + \sec b$ ABCD de lado 1. O ponto F está em BC, BF

mede ,

D) $\operatorname{cosec} a + \operatorname{cosec} b$ o ponto e está em CD e AF é bissetriz do ângulo BAE.

E) $\cos a + \cos b$ Nessas condições, o segmento DE mede

10. (PUC RS) A expressão $\cos^4 A \cdot B \cdot a - \sin^4 a + \cos^2 a - \sin^2 a$

é idêntica a

A) $2 \cdot \cos 2a$

B) $2 \cdot \sin 2a$

C) $\cos 2a$

D) $\sin 2a$

E) $\cos 2a - \sin 2a$

11. (PUC Minas) $M = \cos^2 x$, para todo x real, é **CoRReTo**

A) D) 40 afirmar que **M** é igual a 40

A) $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ B) $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

$$1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

B) $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

$$1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

C) $1 + \cos^2 x = 2 \cos^2 x$

Fixação

12. (Unifor-CE) A expressão $\sin^2 x + \cos^2 x$ é equivalente a

$$1$$

01. C 03. C 05. A

A) 1 D) $1 + \sin^2 x$

B) 0 E) $1 + \cos x$

C) $\cos \frac{x}{2}$ Propostos

2

13. $\sin 40^\circ \cos 40^\circ$ 01. C 06. A 11. C

(UECE) Se $P = \frac{1}{2}$, então $P - 1$ é igual a 02. C 07. B 12. D $\sin 20^\circ \cos 20^\circ$

A) $\sin 20^\circ$ 03. E 08. D 13. C

B) $\cos 20^\circ$ 04. D 09. A 14. B

C) $\tan 20^\circ$ 05. E 10. A 15. D

D) $\cot 20^\circ$

64 Coleção Estudo MATEMÁTICA

MÓDULO FRENTE Equações e inequações 06 E trigonométricas

EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS Em
resumo, para $k \in \mathbb{R}$, temos:

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções trigonométricas. $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right\} \mid \alpha \beta = + 2k\pi \text{ sen } a = \text{sen } b \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \end{array} \right.$

Para resolver a equação trigonométrica $f(x) = g(x)$,
 $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \pi \beta = - + k\pi \end{array} \right.$

devemos reduzi-la a uma das três equações seguintes:

i) $\text{sen } a = \text{sen } b$;

ii) **RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO** $\cos a = \cos b$;

iii) $\cos a = \cos b \text{ tg } a = \text{tg } b$.

Estas são denominadas equações fundamentais. Se $\cos a = \cos b = OP$, então as imagens de a e b no ciclo estão sobre a reta r , que é perpendicular ao eixo dos

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $\cos$ senos no ponto P , isto é, estão em p ou P' .²

Há, portanto, duas possibilidades:

$\text{SEN } a = \text{SEN } b$ i) a e b têm a mesma imagem, isto é, são côngruos; ou

ciclo estão sobre a reta r , que é perpendicular ao eixo dos Se **sen ii)** a e b têm imagens simétricas em relação ao eixo dos $= \text{sen } a = \text{sen } b = OP$, então as imagens de a e b no cossenos.

senos no ponto P , isto é, estão em p ou P' . $v_1 r$

Há, portanto, duas possibilidades:

P

i) a e b têm a mesma imagem, isto é, são côngruos; ou

ii) a e b têm imagens simétricas em relação ao eixo dos

senos, isto é, são suplementares. O $P_2 A u$

$\mathbf{v}$

$A P'$

$P' P_1 P$

r

Em resumo, para $k \in \mathbb{Z}$, temos:

O u



$$\cos \left[\left| \alpha - \beta \right| \right] = \cos \left[\left| \alpha + \beta \right| \right] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha - \beta = \pm (\alpha + \beta) + 2k\pi \end{array} \right.$$



$$\therefore \cos a = \cos b \Rightarrow a = \pm b + 2k\pi$$



Frente E Módulo 06

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO RESOLUÇÃO DE $\text{SEN } x > m$

$\text{TG } a = \text{TG } b$ Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P , tal que $\text{tg } a = \text{tg } b$

sobre a reta r , determinada por O e T , isto é, estão em p Se $\text{tg } OP = m$. Traçamos por P a reta r , perpendicular ao eixo. $\text{tg } a = \text{tg } b = AT$, então as imagens de a e b estão $\text{tg } a = \text{tg } b = AT$, então as imagens dos reais x , tais que $\text{sen } x > m$, estão na interseção do ciclo com o semiplano situado acima de r . ou P' .

Finalmente, descrevemos os intervalos aos quais x pode

Há, portanto, duas possibilidades:

pertencer, tomando o cuidado de partir de A e de

i) a e b têm a mesma imagem, isto é, são congruos; ou o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta.

ii) a e b têm imagens simétricas em relação ao centro

do ciclo. v

V

r

$$T P_1$$

Pr

X

O A u

O A u

P'

exemplo

Em resumo, para $k \in \mathbb{N}$, temos: 2 Resolver a inequação $\sin x \geq -\frac{1}{2}$, em $\mathbb{R}$. 2

tg | Procedendo conforme foi indicado,
 para $k \in \mathbb{Z}$, temos: $2 \mid \alpha \beta = + k \pi \Rightarrow a =$
 $\text{tg } b \Rightarrow \{ \alpha \pi \beta = + + 2 k \pi \}$

$\therefore 0 + 2k 5\pi 7\pi p \leq x \leq + 2k p \text{ ou } + 2kp$
 $\leq x < 2p + 2kp \text{ tg } a = \text{tg } b \Rightarrow a = b + k$
 $p 4 4$

INEQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

Dadas $f(x)$ e $g(x)$ duas funções trigonométricas, as inequações trigonométricas $f(x) > g(x)$ ou $f(x) < g(x)$

podem ser reduzidas a inequações de um dos seis tipos:

$$12 \text{ O } 2 \pi u$$

i) $\sin x > m$

$$5\pi \text{ } 7\pi$$

ii) $\sin x < m$

iii) $\cos x > m$

iv) $\cos x < m$

v) $\tan x > m$

vi) $\tan x < m$

Notemos que escrever $x \leq + 2k\pi$ estaria errado, pois, como $x \leq + 2k\pi$, não existe x algum nesse intervalo. Em que m é um número real dado a denominadas

inequações fundamentais. intervalo.

Equações e inequações trigonométricas

RESOLUÇÃO DE $\text{SEN } x < m$

Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P , tal que $OP = m$.

Traçamos por P a reta r , perpendicular ao eixo.

As imagens dos reais x , tais que $\text{sen } x < m$, estão na

x

interseção do ciclo com o semiplano situado abaixo de

r .

Finalmente, partindo de A e percorrendo o ciclo no sentido

anti-horário até completar uma volta, descrevemos os

intervalos que convêm ao problema.

v

exemplo

Resolver a inequação $\cos x > \frac{1}{2}$, em $[0, 2\pi]$.

r Procedendo conforme foi indicado, para $k \in \mathbb{Z}$,
temos:

$$x$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ ou } 2\pi + 2k\pi \leq x < 4\pi + 2k\pi$$

$$v$$

$$\pi$$

exemplo 6

Resolver a inequação $\sin x < \frac{1}{2}$, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, para $k \in \mathbb{Z}$,
temos: **MATEMÁTICA**

$$0 \leq x < \pi \text{ ou } \pi \leq x < 2\pi$$

$$v$$

5 π π RESOLUÇÃO DE COS X < M_{6 6}

1

2 Marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto P , tal
que₂

O u OP = m. Traçamos por P a reta **r**, perpendicular
ao eixo._{2 2}

As imagens dos reais **x**, tais que $\cos x < m$, estão na
interseção do ciclo com o semiplano situado à
esquerda de **r**.

Para completar, descrevemos os intervalos que
convêm

ao
problema.

v r

RESOLUÇÃO DE COS X > M

Marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto P , tal
que_{2 x}

OP = m. Traçamos por P a reta **r**, perpendicular ao
eixo. O P A u_{2 2 2 2} As imagens dos reais **x**, tais que $\cos x$
> m, estão na

interseção do ciclo com o semiplano situado à direita

de r .

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm
ao problema.

Editora Bernoulli 67

Frente E Módulo 06

exemplo $\pi \leq x < \pi + k\pi$

Resolver a inequação $\cos x < -\frac{1}{2}$, em $0 \leq x < 2\pi$.

2

Procedendo conforme foi indicado, para $k \in \mathbb{Z}$, temos:

π

$$2k\pi \leq x < 2k\pi + \pi \text{ e } 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \leq x < 2k\pi + 2\pi$$

v

$$2\pi \leq x < 4\pi$$

1

$2 \ 3\pi$

2

O u

4 π RESOLUÇÃO DE TG X < M₃

Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto T, tal
que

RESOLUÇÃO DE TG X_{AT} = m. Traçamos
a reta r = OT. As imagens dos reais x, > M

tais que tg x < m, estão na interseção do ciclo com o

Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto T, tal
que ângulo TOB' + kp, para k ∈ $\square$.

AT = m. Traçamos a reta r = OT. As imagens dos
reais x, Para completar, descrevemos os intervalos que
convêm

tais que tg x > m, estão na interseção do ciclo com o
ângulo ao problema.

TOB + k p, para k ∈ $\square$.

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm

ao problema. B T

v r

B T x

A' O A u

x

A' O A u B'

B' **exemplo**

Resolver a inequação $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$, em $\mathbb{R}$.

exemplo Procedendo conforme foi indicado, para $k \in \mathbb{Z}$, temos:

Resolver a inequação $\operatorname{tg} x > 1$, em $\mathbb{R}$. $\pi \pi 4\pi 0 + 2k$

$p \leq x < \pi + 2k p$ ou $\pi + 2k p < x < \pi + 2k p + \frac{\pi}{2}$

Procedendo conforme foi indicado, para $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\frac{4\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, + \\ \frac{2k\pi}{2} \leq x \leq \frac{2k\pi}{2} \text{ ou } \frac{2k\pi}{2} \leq x \leq \frac{2k\pi}{2} + 2k\pi, 2$$

que podem ser resumidos em: que podem ser resumidos em:

68 Coleção Estudo

Equações e inequações trigonométricas

05. π (VUNESP) O conjunto solução de $|\cos x| < \frac{1}{2}$, para $0 \leq x < 4\pi$

$$0 < x < \pi \text{ ou } 2\pi < x < 3\pi$$

é definido por

$$A) \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$$

$$B) \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$$

$$C) \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$$

D)
 $\frac{\pi}{5} < x < \frac{4\pi}{5}$
 $\frac{6\pi}{5} < x < \frac{7\pi}{5}$

$\pi E) \pi 2\pi 4\pi 11\pi < < x \text{ ou } < < x O O u 6 6 6 6$

4π EXERCÍCIOS PROPOSTOS

$3 3\pi$

2 01. (UFLA-MG-2009) O conjunto verdade (conjunto solução)

2

da equação $\sin x = \frac{1}{2}$ é

2

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO $\left(\left| \pi \right| \mid A \right) x \in \mid$

$x = \pm + 2 k k \pi, \{ \in \{ 4 \mid \mid \mid \}$ **01.** (UFU-MG) Considere que **f** e **g** são as funções $\left(\left| \pi \right| \mid \left(\left| 3\pi \right| \mid B \right) x \{ \in \mid x = + 2 k k \pi, \in \cup x \mid x \right.$
 $k k$ reais de variável real dadas, respectivamente, por $\{ \} \{ \in = + 2 \pi,$
 $\in \{ 4 4 \mid \mid \mid \{ \mid \mid \} f(x) = 1 + \sin(2x)$ e $g(x) = 1 + 2 \cdot \cos(x)$. Desse modo, $\left(\left| \pi \right| \mid \left(\left| 3\pi \right| \mid \right.$ podemos afirmar que, para $x \in [0, 2\pi)$, os gráficos de C) $x \{ \in \mid x = + 2 k k \pi, \in x \mid x \} \cap \{ \in = + 2 k k \pi, \in$

$\{ 4 4 \mid \mid \mid \{ \mid \mid \} f$ e g cruzam-se em **MATEMÁTICA** $\left(A \right)$
1 ponto. C) 3 pontos. $\left| \pi \right| \mid \left(\left| 3\pi \right| \mid D \right) x \in \mid x = + 2 k k \pi, \in x$
 $x k k \{ \} \cup \{ \in \mid = - + 2 \pi, \in \{ 4 4 \mid \mid \mid \{ \mid \mid \} B$ 2 pontos. D)
nenhum ponto.

02. 1

(UNIRIO-RJ) O conjunto solução da equação $\cos 2x = \frac{1}{2}$, é

02. 2 (Unifor-CE) Para todo número inteiro k , o conjunto

solução de $(\cos x + \sin x)$ sendo x um arco da 1ª volta positiva, é dado por $\sin x = 0$ é o conjunto dos números

reais x iguais a A) $\{60^\circ, 300^\circ\}$ D) $\{30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ\}$

A) $\pi, \pi + k\pi$ B) $\{30^\circ, 330^\circ\}$ E) $\{15^\circ, 165^\circ, 195^\circ, 345^\circ\}$ C) $\pi + k\pi$ D) $\pi + 2k\pi$ C) $\{30^\circ, 150^\circ\}$

B) $\pi + k\pi$ D) $\pi + k\pi$ **03.** (UFRGS) O conjunto solução da equação $\sin x + \cos x = 0$ é

$$\sin x + \cos x = 0$$

03. (UFJF-MG) O conjunto solução da equação $|\cos 2x| = 0$ é $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ A) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

04. (CEFET-MG-2009) O conjunto solução da equação

04. (Mackenzie-SP) Se a é a soma das soluções da equação $2 \cos^2 x - 1 = 0$

para $x \in [0, 2\pi]$ é $\frac{\pi}{2}$, então $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, resolvida em $[0, 2\pi]$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

então o valor de $\sin \alpha$ é $\frac{\pi}{5}$ A) $\frac{\pi}{11}$ B) $\frac{\pi}{11}$ C) $\frac{\pi}{11}$ D) $\frac{\pi}{11}$ E) $\frac{\pi}{11}$

A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $-\frac{2}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{2}{3}$

Editora Bernoulli 69

Frente E Módulo 06

05. (UFJF-MG-2009) Os valores de $x \in [0, 3\pi]$ que satisfazem $\cos x = -\frac{1}{2}$ são $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$.
(Unimontes-MG-2009) As soluções da equação

a desigualdade $\cos x < -\frac{1}{2}$ no intervalo $[0, 2\pi]$, são $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$.
A) $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ D) $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ E) $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$
12. (UFTM-MG-2008) Na figura, na qual estão representados os gráficos das funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$, o ponto P é um ponto onde dois gráficos se interceptam.

06. y (Unifor-CE) O número de soluções da equação

$2 \sin x \cos x = 4$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

P

07. (UNIRIO-RJ) O conjunto solução da equação $\sin x = \cos x$, no intervalo $[0, 2\pi]$, é

sendo $0 \leq x < 2\pi$ O k x p, é

08. A) $\left[\pi \right] \left[5\pi \right] \left[\pi 5\pi \right] \left\{ \right\} C) \left\{ \right\}, E) \left\{ \right\}$ Se k é a abscissa do ponto p, então o valor de $f(2k)$ é igual a $\left[\pi \right] \left[\pi 4 \pi \right] B) \left\{ \right\} D) \left\{ \right\}, \left\{ 5 \pi 3 \pi 3 2 \pi 3 \pi \right\} \left\{ 3 \right\} \left\{ 3 3 \right\}$ A) B) C) D) E) 0 2 2 4 8 π (UFV-MG) Se $2 \cdot \cos^2 q - 3 \cdot \cos q + 1 = 0$ e $0 \leq q \leq 2\pi$ 14. (UEL-PR) Se $x \in [0, 2\pi]$, o número de soluções da equação então

A) $\pi \left[\pi \pi \right] q = 0$ ou $q = \cos 2x = \sin x$ - $\left[4 6 \right] 2$

B) $\sin q = 1$ A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5 $q = 1$ ou $\sin q = 2$

3 **15.** (UFU-MG) O conjunto solução da desigualdade

C) $\sin q = 0$ ou $\sin q = 1$ $2 \sin () x - < , 4 4 \pi \pi$ D) $q = 0$ ou $q = \pi$ para $0 < x < 2\pi$, é igual a 4 8

E) $3 \left[\pi 7\pi \right] q = 0$ ou $\cos q = 0$ A) $\left\{ < < x \right\}$ ou $\pi < < x \left\{ \right\} \left[6 2 \right]$

09. 1 $\left[5\pi 11\pi \right]$ (UEL-PR) Se $x \in [0, 2\pi]$, então $\cos x > \frac{1}{2}$ se, e somente se B) $\left\{ < < x \pi \right\}$ ou $\left\{ < < x 2 \pi \right\} \left[2 \right] \left[6 6 \right]$ se, x satisfizer à condição

A) $\pi \left[\pi 5\pi 7\pi \right] 5 \pi < x < C) \left\{ 0 < < x \right\}$ ou $\left\{ < < x \right\} \left[6 6 6 \right] 3 3$

B) $\pi \left[\pi 5\pi 7\pi \right] < x < x D) \left\{ < < \pi \right\}$ ou $\pi < < \left\{ 3 2 \right\} \left[6 6 \right]$

C) $p < x < 2p \mid \pi 5\pi \mid 0 E) \} < < x \text{ ou } < < x \pi \} \mid 6 6 \mid 3 \pi \pi 5$
 $\pi D) < x < \text{ ou } < x < 2 p 2 3 3$

E) $0 \leq x < \pi 5\pi \text{ ou } < x \leq 2p 3 3$ **GABARITO**

10. (Cesgranrio) O arco x é medido em radianos. Então,

Fixação

a soma das duas menores raízes positivas de $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

2 01. B 02. D 03. C 04. C 05. A

A) $4 \pi 2\pi 3\pi 5\pi$ B) p C) $D) E) 3 2 4 5$ **Propostos**

11. 01. B 04. B 07. E 10. B 13. B (UFC) Considere a equação $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$.

Pode-se afirmar que a soma de suas soluções que 02. D 05. E 08. C 11. D 14. D

pertencem ao intervalo $[0, 4\pi]$ é 03. A 06. A 09. E 12. B 15. E

A) 1 B) -1 C) 0 D) $4 p$ E) $2p$

70 Coleção Estudo **MATEMÁTICA**
MÓDULO FRENTE Sistema cartesiano
e ponto 07 E



SISTEMA CARTESIANO – y

COORDENADAS DE UM PONTO 2º Q 1º Q

O x

Sejam x e y dois eixos perpendiculares entre si e
com 3º Q 4º Q

origem comum O , conforme a figura a seguir:

y ii) Neste curso, a reta suporte das bissetrizes do 1º e
do

3º quadrantes será chamada bissetriz dos quadrantes

ímpares e indicada por b . A do 2º e 4º quadrantes

O x

será chamada bissetriz dos quadrantes pares e

indica
por
b

• p

Nessas condições, diz-se que **x** e **y** formam um sistema b y

p i b

cartesiano retangular (ou ortogonal), e o plano por eles

determinado é chamado plano cartesiano.

O x

Eixo **x** (ou **Ox**): eixo das abscissas

Eixo **y** (ou **Oy**): eixo das ordenadas

o: origem do sistema **Propriedades**

A cada ponto **p** do plano, corresponderão dois números:

a (abscissa) e **b** (ordenada), associados às projeções

i) Todo ponto **P(a, b)** do 1º quadrante tem abscissa

ortogonais de **p** sobre o eixo **x** e sobre o eixo **y**, respectivamente. positiva ($a > 0$) e ordenada positiva ($b > 0$) e

Assim, o ponto **p** tem coordenadas **a** e **b**, e será indicado reciprocamente.

analiticamente pelo par ordenado (a, b).



$$P(a, b) \in 1^{\circ} Q \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b > 0$$

y

b $P(a, b)$ Assim: $P(3, 2) \in 1^{\circ} Q$

y

O a x P 2

Nota:

Neste estudo, será utilizado somente o sistema cartesiano O 3 x

retangular, que será chamado, simplesmente, sistema cartesiano.

ii) Todo ponto $P(a, b)$ do 2º quadrante tem abscissa

OBSERVAÇÕES negativa ($a < 0$) e ordenada positiva ($b > 0$) e

i) Os eixos x e y dividem o plano cartesiano em quatro

regiões ou quadrantes Q , que são numerados, como



na figura a seguir: $P(a, b) \in 2^\circ Q \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } b > 0$

Editora Bernoulli 71

Frente E Módulo 07

Assim: $P(-3, 2) \in 2^\circ Q$ vi) Todo ponto do eixo das ordenadas tem abscissa nula

e
recipro

y

$$P(a, b) \in Oy \Leftrightarrow a = 0$$

P

2

Assim:
 $P(0, 3) \in Oy$

-3 y O x

iii) Todo ponto $P(a, b)$ do 3º quadrante tem abscissa negativa ($a < 0$) e ordenada negativa ($b < 0$) e O x reciprocamente.

$P(a, b) \in 3^\circ Q \Leftrightarrow a < 0$ e $b < 0$ ímpares tem abscissa e ordenada iguais ($a = b$) e vii) Todo ponto $P(a, b)$ da bissetriz dos quadrantes



recipro

Assim: $P(-3, -2) \in 3^\circ Q$

y $P(a, b) \in b \Leftrightarrow a = b_i$

-3 O Assim: $P(-2, -2) \in b_{xi}$

y

P -2 b_i

-2

O x

P -2

iv) Todo ponto $P(a, b)$ do 4º quadrante tem abscissa positiva ($a > 0$) e ordenada negativa ($b < 0$) e

viii) Todo ponto $P(a, b)$ da bissetriz dos quadrantes reciprocamente.

pares tem abscissa e ordenada opostas ($a = -b$) e



recipro

$$P(a, b) \in 4^\circ Q \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b < 0$$

Assim: $P(3, -2) \in 4^\circ Q \Leftrightarrow a = 3 \text{ e } b = -2$

y Assim: $P(-2, 2) \in 2^\circ Q$

O 3 y b x_p P 2

-2

P -2 O x

v) Todo ponto do eixo das abscissas tem ordenada nula **PONTO MÉDIO**
e reciprocamente.

$P(a, b)$ Considerem-se os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.
Sendo $M(x_M, y_M) \in OX \Leftrightarrow b = 0$

$M(x_M, y_M)$ o ponto médio de AB (ou BA), tem-se:

Assim: $P(3, 0) \in OX$ $x_A + x_B = 2x_M$ e $y_A + y_B = 2y_M$

Ou seja, o ponto **M** é dado por:

$$OP \left(\frac{xx}{yy} \right) \frac{AM}{AB} = \frac{BA}{AB} = \frac{1}{2} \quad \left| \frac{2}{2} \right| \frac{3}{3} \frac{x}{x} \left(\frac{1}{1} \right)$$



72 Coleção Estudo



Sistema cartesiano e ponto

Demonstração: Pelo Teorema de Tales, para o eixo x , podemos escrever:

$$\frac{y}{BA'} = \frac{G'M'}{GM}$$

$$B''(y_B)$$

$$\frac{M}{x - x} = \frac{2(x - x)}{3x} = \frac{x}{x + 2x} \Rightarrow \frac{GM}{GA} = \frac{2}{3}$$

$$M''(y_M)$$

$$A'' \text{ A E, como } \frac{x}{x} + \frac{x_B}{x} = \frac{c}{x}, \text{ tem-se: } \frac{2}{3} \left(\frac{y_A}{x} \right)$$

$$\frac{O}{3x} \left(\frac{x + x}{x} \right) \frac{x + x + x}{x} = \frac{x + 2x}{x} = \frac{3x}{x} = 3$$

$$\frac{A}{B} \parallel \parallel \Rightarrow \frac{x_A}{x_B} = \frac{2}{3} \frac{A'}{B'} \quad \left(\frac{x_{M'}}{x_M} \right) \left(\frac{x_{B'}}{x_B} \right)$$

Analogamente, para o eixo y, tem-se:

Se **M** é ponto médio de AB (ou BA), pelo Teorema de Tales,

para o eixo x, pode-se escrever: $y_A y_B = +_B +_{CG} 3$

$$A'M' = M'B' \Rightarrow x - x = x - x_{M \text{ A } BM} \Rightarrow$$

Analogamente, para o eixo y, tem-se: $y_2 \cdot x \cdot x_A = x$

$+ x \cdot x = +_{BMA} \Rightarrow M$ 2 **DISTÂNCIA ENTRE**

DOIS PONTOS $y + y =_{ABM} 2$ (Considerem-

se dois pontos distintos A (x, y_{AA}) e B (x, y_{BB}))

Portanto, as coordenadas do ponto médio **M** do segmento

AB (ou BA) tais que o segmento AB não seja paralelo a algum dos eixos são, respectivamente, as médias aritméticas das abscissas de **A** e **B** e das ordenadas de **A** e **B**. coordenados.

Traçando-se por **A** e **B** as retas paralelas aos eixos

BARICENTRO DE UM coordenados que se interceptam em **C**, tem-se o triângulo

MATEMÁTICA

TRIÂNGULO ACB , retângulo em C .

y

Seja o triângulo ABC de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$

$C(x_C, y_C)$. O baricentro (ponto de encontro das medianas)

do triângulo ABC tem coordenadas:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \text{ e } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Ou seja, o ponto G é dado por:



$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$ | distância entre os pontos A e B que se indica por d é $||AB||$ tal que:



Demonstração: $d = x - y y_{AB} + x_A - y_B$



y



C



G M OBSERVAÇÕES

A i) Como $(x - x_2 = x_2, \text{ a ordem escolhida para }_{BA}) (x_A - x_{AB})$

B a diferença das abscissas não altera o cálculo de **d**.

O O mesmo ocorre com a diferença das ordenadas. A' $(x_A) G' (x_M' x_G) (x_M)$

ii) A fórmula para o cálculo da distância continua válida se

Considerando a mediana AM, o baricentro **G** é tal que: o segmento AB é paralelo a um dos eixos, ou, ainda,

AG = 2.GM se os pontos **A** e **B** coincidem, caso em que $d = 0$.

Frente E Módulo 07

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO 05. (UFMG–2010) Os pontos $A(0, 3)$, $B(4, 0)$ e $C(a, b)$ são vértices de um triângulo equilátero no plano cartesiano.

01. Considerando-se essa situação, é **CoRReTo** afirmar que

(UFMG–2008) Nesta figura, está representado um

quadrado de vértices $ABCD$. 4 A) $b = a + 3$

C y 4 7 B) $b = a - 3$ 6

4

C)
 $b = a + 3$

3

$B(3, 4)$

$D(a, b)$ 4 3 D) $b = a - 3$ 2

O A(0, 0) x EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Sabe-se que as coordenadas cartesianas dos pontos

01. (FUVEST-SP) Sejam A(1, 2) e B(3, 2) dois pontos do

A e B são A(0, 0) e B(3, 4). Então, é **CoRReTo** afirmar

que o resultado da soma das coordenadas do vértice D é plano cartesiano. Nesse plano, o segmento AC é obtido

do segmento AB por uma rotação de 60° , no sentido

1 3

A) -2 B) -1 C) $-D$ – anti-horário, em torno do ponto A. As coordenadas do

2 2

ponto
C
são

02. (UFMG–2007) Seja P(a, b) um ponto no plano cartesiano, A) $(2, 2 + \sqrt{3})$

tal que $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$. As retas paralelas aos eixos (5) coordenados que passam por P dividem o quadrado de $|2|$ B) $|1 + 3, |)$

vértices (0, 0), (2, 0), (0, 2) e (2, 2) nas regiões I, II, C) $(2, 1 + \sqrt{3})$

III e IV, como mostrado nesta figura: D) $(2, 2 - \sqrt{3})$

y E) $(1 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$

2 **02.** (Mackenzie-SP-2009)

IV y III

b P A B I II

O a 2 x

Considere o ponto $Q = (a^2 + b^2, ab)$. O x

Então, é **CoRReto** afirmar que o ponto **Q** está na região

A) I. A figura mostra uma semicircunferência com centro na C) III.

B) II. origem. Se o ponto **A** é $(-2, 2)$, então o ponto **B** é D) IV.

A) $(2, 1)$ D) $(15, 1)$

03. (Cesgranrio) Os pontos **M**, **N**, **p** e **Q** do $\square_2$ são os vértices B) $(12, 2)$ E) $(2, 15)$

de um paralelogramo situado no primeiro quadrante. C) $(1, 15)$ Se $M(3, 5)$, $N(1, 2)$ e $P(5, 1)$, então o vértice **Q** é

A) $(7, 4)$ D) $(8, 6)$ **03.** (UFMG) Se $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$ são os vértices

C) $(9, 8)$, pertence $\parallel$ de um quadrado, então $P(1, 1) \setminus B(6, 5)$ E)

04. A) ao lado AB. (UFMG) A área de um quadrado que tem $A(4, 8)$ e $B(-2, 2)$

como vértices opostos é B) ao lado BC.

A) 36 C) ao lado CD. D) 16

B) 20 D) à diagonal E) $12AC$.

C) 18 E) à diagonal BD.

74 Coleção Estudo

Sistema cartesiano e ponto

04. (UFMG) Seja $P(x, y)$ um ponto equidistante dos eixos **10.**
(UCDB-MS) Um triângulo tem vértices $A(15, 10)$, $B(6, 0)$,

coordenados e de distância 1 da origem. Pode-se afirmar $C(0, 10)$.
Então, a mediana AM mede

que o número de pontos que satisfazem essas condições é A) 10 u.c.

A) 1 D) 4

B)
12
u.c.

B) 2 E) 5

C)
11
u.c.

C) 3

D)

13

u.c

05. (UFMG) A distância entre os pontos $A(2a, -3a)$ e $B(3, 2)$ é 9 u.c.

é 126. Pode-se afirmar que os **possíveis** valores de a são

A) -12 e 12 **11.** (FEI-SP) Os pontos X , Y e Z possuem, respectivamente,

B) $1 - 12$ e $1 + 12$ as seguintes coordenadas no plano cartesiano: $(0, 0)$,

C) -1 e 1 $(m, 8)$, $(n, n + 3)$. Se Z é o ponto médio do segmento XY , então

D) -2 e 2 A) $m = 2$

E) -3 e 2 B) $m = 1$

C)

n

$=$

3

06. (UFMG) Seja $Q(-1, a)$ um ponto do 3º quadrante.

D)

m

$=$

5

O valor de a , para que a distância do ponto $P(a, 1)$ ao

ponto Q seja 2, é E) $n = 2$

A) $-1 - 12$ D) $-1 + 12$

B) $1 - 12$. (UCSal-BA) Na figura, o triângulo ABC é equilátero, sendo 12 E) -1

C) $1 + A$ e B , respectivamente, os pontos $(0, 0)$ e $(4, 0)$. 12

07. (UFOP-MG–2008) O baricentro de um triângulo é o

ponto de encontro de suas medianas. Sendo assim,

MATEMÁTICA

as coordenadas cartesianas do baricentro do triângulo

de vértices $(2, 2)$, $(-4, -2)$ e $(2, -4)$ são

A) $(\frac{4}{3}, \frac{3}{4})$, $(\frac{0}{3}, \frac{0}{4})$, $(\frac{0}{3}, \frac{0}{4})$

A

B) $(\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{0}{3}, \frac{0}{4})$, $(\frac{0}{3}, \frac{0}{4})$

08. As coordenadas do ponto C são (UFAL) Sejam $P(2, 1)$ e o ponto Q, de abscissa 4, localizado

no 1º quadrante. Se a distância de Q a P é igual à distância A) $(2, 1)$ D) $(3, 3)$

de Q ao eixo das abscissas, então Q é o ponto B) $(2, 2)$ E) $(3, 2)$

A) $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ C) $(2, 2)$, $(4, 2)$

B) $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ **13.** (UFU-MG) Considere, no plano

cartesiano com origem O, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ um triângulo cujos vértices A, B e C têm coordenadas C) $(4, 3)$ $(-1, 0)$, $(0, 4)$ e $(2, 0)$,

respectivamente. Se M e N são D) $(2, 4)$ os pontos médios de AB e BC , respectivamente, a área E $(4, 4)$ do triângulo OMN será igual a

09. 5 (UECE) Se o ponto $P(x, y)$ é equidistante dos pontos $A(1, 1)$ e $B(3, 0)$, então $x^2 + y^2$ é igual a

A) 13

B)
u.a.

B) 17

C) 25

D) 29

Editora Bernoulli 75

Frente E Módulo 07

SEÇÃO ENEM 03. (Enem–2010) Um foguete foi lançado do marco zero de uma estação e após alguns segundos atingiu a posição

01. $(6, 6, 7)$ no espaço, conforme mostra a figura. As distâncias (Enem–1999) José e Antônio viajarão em seus carros com

as respectivas famílias para a cidade de Serra Branca. são medidas em quilômetros.

Com a intenção de seguir viagem juntos, combinam um

encontro no marco inicial da rodovia, onde chegarão,

de modo independente, entre meio-dia e 1 hora da tarde. Entretanto, como não querem ficar muito tempo esperando um pelo outro, combinam que o primeiro que chegar ao marco inicial esperará pelo outro, no máximo, meia hora; após esse tempo, seguirá viagem sozinho. Chamando de x o horário de chegada de José e de y o horário de chegada de Antônio, e representando os pares $(0, 0, 0)$ (x, y) em um sistema de eixos cartesianos, a região OPQR x indicada a seguir corresponde ao conjunto de todas as possibilidades para o par (x, y) .

Chegada de

Antônio Considerando que o foguete continuou sua trajetória,

P Q

1 mas se deslocou 2 km para frente na direção do

(13h)

eixo x, 3 km para trás na direção do eixo y, e 11 km para

frente, na direção do eixo z, então o foguete atingiu a

posição

A) $(17, 3, 9)$ D) $(4, 9, -4)$

O R B) $(8, 3, 18)$ E) $(3, 8, 18)$

0 1 Chegada

(12h) (13h) C) $(6, 18, 3)$ de José

Na região indicada, o conjunto de pontos que representa

GABARITO

o evento “José e Antônio chegam ao marco inicial

exatamente no mesmo horário” corresponde **Fixação**

A) à diagonal OQ.

B) à diagonal PR. 01. B 02. B 03. A 04. A 05. B

C) ao lado PQ. **Propostos**

D) ao lado QR.

E) ao lado OR.

01. A 08. B

02. O mapa de certa cidade foi dividido em quatro quadrantes, 02. A
09. C

por meio de duas retas perpendiculares e numeradas, que

se cortam no ponto $(0, 0)$, cada um deles correspondendo 03. D 10.

D

a um quadrante do plano cartesiano. O sentido positivo do

04. D 11. A

eixo y é o norte, e o sentido positivo do eixo x é o leste.

Edificações que, nessa cidade, estiverem a mais de um 05. C 12. C

quilômetro a oeste e a mais de um quilômetro ao norte

do ponto $(0, 0)$ estarão localizadas no

A) primeiro quadrante. 07. A

B) segundo quadrante. **Seção Enem**

C) terceiro quadrante.

D) quarto quadrante.

01. A 02. B 03. B

E) ponto $(0, 0)$.

76 Coleção Estudo MATEMÁTICA

MÓDULO FRENTE Estudo analítico da

reta 08 E

INCLINAÇÃO DE UMA RETA

COEFICIENTE ANGULAR

Considere-se, no plano cartesiano, uma reta r
concorrente **DE UMA RETA**

com o eixo x no ponto p .

Considerando-se uma reta r não perpendicular ao eixo

Chama-se inclinação de r a medida do ângulo a que r (não vertical), ou seja, tal que $a \neq 90^\circ$, chama-se coeficiente

forma com o eixo Ox , sendo esse ângulo medido a partir do angular (ou declividade) da reta r o número m , tal

eixo x no sentido anti-horário. que $m = \operatorname{tg} a$.

OBSERVA

y

i) A inclinação m de uma reta é tal que $0^\circ \leq a < 180^\circ$.

ii) No plano cartesiano, duas retas paralelas têm a mesma

inclinação

α y

r s

O P x

Sendo r paralela ao eixo x (horizontal), define-se como

inclinação de r o ângulo de medida zero, isto é, $\alpha = 0^\circ$.

O x

Então:

Se $a = 90^\circ$, então a reta não tem coeficiente angular.

a Assim, tem-se: $= 0^\circ$ (nulo) $0^\circ < a < 90^\circ$ (agudo)

i) y ii) y r

y y

$$r \cdot m = 0$$

$$\exists m$$

r

r

α

$$O \times O \times$$

$$O \times O \times$$

iii) y iv) y

r

r

$$a = 90^\circ \text{ (reto) } 90^\circ < a < 180^\circ \text{ (obtuso) } m > 0 \text{ } m < 0$$

$$y \alpha r \text{ } y \alpha r$$

$$O \times O \times$$

Isto
é:

α α i) Se $a = 0^\circ$, então $m = 0$.

ii) Se $a = 90^\circ$, então não existe m .

O x O x iii) Se $0 < a < 90^\circ$, então $m > 0$.

iv) Se $90^\circ < a < 180^\circ$, então $m < 0$.

Editora Bernoulli 77

Frente E Módulo 08

exemplo 2º caso: $a > 90^\circ$

Dar os coeficientes angulares das retas **r**, **s**, **t** e **u**.

Do
triângulo
ABC,
tem-
se:

A) y C) y CB y y $\tan b = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B}$

y

r B

60° y_B

O x O x β C A y_A

B) y s D) y α

u β

O x x x_{BA}

Como $a + b = 180^\circ$, tem-se $\operatorname{tg} a = -\operatorname{tg} b$.

135°

O Logo: $m = \operatorname{tg} y - y y y_B a = -_A = _B -_A x O x x -$
 $x x x_{ABB} -_A$

Portanto, para os dois casos, tem-se:

Resolução:



$$m = y - y_{BA}$$

A) $a = 0^\circ m_r \Rightarrow = \operatorname{tg} 0^\circ m = 0_r \Rightarrow_r x - x_{BA}$

B) $a = 90^\circ_s \Rightarrow$ não existe m_s

OBSERVA

C) $a = 60^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ m = _t \Rightarrow m_t \Rightarrow_t^{13}$

i) Se a reta AB é paralela ao eixo x ($y = y$ e $x x, _{ABA}$
 $\neq_B$)

D) $a = 135^\circ m_u \Rightarrow = \operatorname{tg} 135^\circ_u \Rightarrow m = -1_u$ tem-se $m = 0$, e a fórmula continua válida.

ii) Se a reta AB é perpendicular ao eixo x ($x = x_A$ e $y = y_B$),

COEFICIENTE ANGULAR não existe m,
pois $x - x = 0$._{AB}

exemples

DE UMA RETA QUE PASSA 1º) Qual o coeficiente angular das retas que passam nos

POR DOIS PONTOS DADOS seguintes pontos:

Considerem-se dois pontos A e B no plano cartesiano. Sejam x_A, y_A e x_B, y_B as coordenadas dos pontos A e B, respectivamente. A distância entre os pontos A e B é dada por:

$x_A \neq x$ e $y_A \neq y$, isto é, a reta AB não é paralela aos eixos
 $\Rightarrow m_{AB} = \frac{y_A - y}{x_A - x} = \frac{y_B - y}{x_B - x} \Rightarrow m_{AB} = \frac{y_B - y}{x_B - x}$
 m coordenadas. Há dois casos a se considerar: $\left\{ \begin{array}{l} m_{AB} = \frac{y_B - y}{x_B - x} \\ m_{AB} = \frac{y_B - y}{x_B - x} \end{array} \right.$

1º caso: $\alpha < 90^\circ$ **2º)** Qual o coeficiente angular da reta r na figura?

Do triângulo ABC, tem-se: y

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0}{0 - 2} = -\frac{1}{2}$$

A

y_B B

O 2 x

y A **Resolução:** α C_A Temos: A(2, 0) e B(0, 1)

$$\begin{aligned} O \alpha y - y_1 \quad m &= m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0}{0 - 2} = -\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow m = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

78 Coleção Estudo

Estudo analítico da reta

EQUAÇÃO FUNDAMENTAL ii) A reta não tem coeficiente angular.

DE UMA RETA Obter uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(x, y)$ e tem inclinação 90° (reta vertical).

No plano cartesiano, uma reta fica determinada por

um

y_r

dos dois modos:

y_Q



1º modo: Conhecendo-se um de seus pontos e sua y_0 P



declividade, que é dada pela inclinação da reta.



2º modo: Conhecendo-se dois pontos distintos que O

$X = X_0$



pertencem a ela.



Sendo r uma reta vertical e $Q(x, y)$ um ponto genérico



de
 r ,
tem-
se:



Vejamos, então, como se obtém a equação de uma reta.

1º modo: Temos dois casos a considerar: $x = x_0$

i) A reta tem coeficiente angular.

exemplo

Obter uma equação da reta r , que passa pelo ponto
Escrever uma equação da reta que passa pelo ponto

$P(x, y)$ e tem coeficiente angular $m_{.00}$) $P(2, 5)$ e é perpendicular ao eixo x .

Sendo $Q(x, y)$ um ponto genérico de r , distinto
Resolução:

de p , então o coeficiente angular m da reta pode ser

calculado a partir de p e Q . y r **MATEMÁTICA**

5 P(2, 5)

y

Q r

y

$y - y_0$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$0 \cdot x - x_0$

0

$x = x_0$, isto é, $x = 2$, ou seja, $x - 2 = 0$.

O $x - x_0$

2º modo: Obter uma equação da reta que passa por dois

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ pontos distintos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ (1) $x - x_0$ Proceda-se da seguinte maneira:

A relação (1) entre as coordenadas dos pontos p e Q

i) Calcula-se o coeficiente angular m da reta AB.

pode ser escrita na forma:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \quad \left(\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \right) \quad m = m_{BA}$$

Note que se $P = Q$, então $x = x_0$ e $y = y_0$, e a relação (2) continua verdadeira, pois $y - y_0 = m(x - x_0)$ (0 = 0)

ii) Com o coeficiente angular m e qualquer um dos pontos dados, recai-se no 1º modo.

Assim:

Assim, tomando-se o ponto A, tem-se:



A equação fundamental da reta que passa pelo ponto $A(x_0, y_0)$ é $y - y_0 = m(x - x_0)$ (A) P (x, y) e tem coeficiente angular m é: 00)



Que é a equação fundamental da reta que passa pelos pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$ é $y - y_0 = m(x - x_0)$

pontos

A

e

B.

Editora Bernoulli 79

Frente E Módulo 08

FORMAS DE REPRESENTAÇÃO

Fazendo $y - y = a$, $x - x = b$ e $y x - y x = c$, a equação fica:

DE UMA RETA

$$ax + by + c = 0$$

Equação reduzida E, se $x = x$, a equação fica $ax + 0y + c = 0$, que é a

equação de uma reta paralela ao eixo y.

Considere-se a reta r que passa pelo ponto $P(0, n)$ e tem

Reciprocamente, no plano cartesiano, a equação
coeficiente angular m . $ax + by + c = 0$ com $a \neq 0$
ou $b \neq 0$ representa uma reta.

y De fato:

$m = m_r$ Se $b \neq 0$, tem-se:

r

$$by = -ax - c \Rightarrow$$

$$O P(0, n) a c y = -x - \frac{c}{b} x$$

Comparando-se com a equação reduzida $y = mx + n$,

Sua equação fundamental é: tem-se:

$$y - n = m(x - 0) \text{ a } y$$

$$m =$$

$$b$$

Segue-se que:

$$\frac{n}{c}$$

$$y = mx + n$$

O x

Esta é chamada equação reduzida da reta.

a c

$$m = -\frac{a}{b} \text{ e } n = -\frac{c}{b}$$

b b

OBSERVAÇÕES

c

i) A equação reduzida de uma reta fornece diretamente Se $b = 0$, tem-se $ax + c = 0$, ou seja, $x = -\frac{c}{a}$.

a

o coeficiente angular m e a ordenada n do ponto onde esta reta intercepta o eixo y .

ii) As retas de inclinação igual a 90° não possuem equação reduzida.

Equação geral

No plano cartesiano, toda equação de uma reta pode ser

escrita na forma $ax + by + c = 0$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. A reta é perpendicular ao eixo x ou y .

0.

De fato: A equação na forma

Sendo $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos distintos,



e $ax + by + c = 0$, temos:

$y - y_B = -\frac{a}{b}(x - x_B)$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$)
 é chamada equação geral da reta.

A equação fundamental da reta que passa por A e B é:

OBSERVAÇÕES
 i) Se $c = 0$, a equação fica $ax + by = 0$, e a reta passa

(pela origem $(0, 0)$).
 $(y - y_A)(x_B - x_A) = (y_B - y_A)(x - x_A)$

$\Rightarrow$

De

$$\begin{aligned} &\text{fato:} \\ &a.0 \\ &+ \\ &b.0 \\ &= \\ &0 \end{aligned}$$

$$y x - y x - y x + y x = y x - y x - y x + y x \quad \text{B A A B A A B B A} \\ \text{A A A} \Rightarrow$$

Assim, por exemplo, a reta (r) $2x + 3y = 0$ passa

$$(y - y x + - x_{A B}) (x y + y x = 0_{B A}) - y x_{B A A B}$$

pela origem.

80 Coleção Estudo

Estudo analítico da reta

ii) Se $a = 0$, a equação fica $by + c = 0$, e a reta é paralela

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

ao eixo x .

$$\text{De fato: } by + c = 0 \Rightarrow y = - \frac{b}{c} x \quad \text{01. (UNIRIO-RJ)}$$

y

Assim, por exemplo, a reta (r) $2y + 5 = 0$ é paralela ao

eixo x .

iii) Se $b = 0$, a equação fica $ax + c = 0$, e a reta é paralela

ao eixo y .

$-2 \text{ O } x$

De fato: $ax + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$

a

Assim, por exemplo, a reta (r) $2x - 7 = 0$ é paralela a equação reduzida da reta representada anteriormente é

ao eixo y . A) $3x - 13y + 6 = 0$

OBSERVAÇÃO B) $3x + 13y + 6 = 0$

Toda reta do plano cartesiano possui infinitas equações na forma geral. C) $13x - y - 2 = 0$

Assim, se $ax + by + c = 0$ é a equação de uma reta, então a equação $k(ax + by + c) = 0$, $k \neq 0$, representa a mesma reta, pois são equações equivalentes, isto é, possuem as mesmas soluções. E) $y = (x + 2) \cdot 3$

3

as mesmas soluções.

Assim, por exemplo, $x + 2y + 3 = 0$ e $3(x + 2y + 3) = 0$ representam a mesma reta.

quadrática.

Equação segmentária $y = x^2 - 1$ a

Considere-se uma reta r que intercepta o eixo x no ponto

$P(p, 0)$ e o eixo y no ponto $Q(0, q)$, com $p \neq 0$ e $q \neq 0$.

A equação da reta r pode ser escrita na forma $-2 \text{ O } x$

r



$x \ y$ A equação da reta r é $+ = 1 \ p \ q$

A) $x - 2y - 2 = 0$

que é chamada equação segmentária da reta r . B) $-2x + y + 1 = 0$

$q -$ C) $x + y - 2 = 0$

De fato: $m = = -$ D) $x + y + 1 = 0 \ 0 \ q$

$0 - p \ p$

E)
 x
 $+$
 $y -$
 1
 $=$
 0

Assim: $y - 0 = -q$

$$.(x - p)$$

$$p_x \mathbf{03.} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(UFMG) O ponto $P \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pertence à curva $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ou seja, $py = -qx + pq \Rightarrow qx + py = pq$ e,
dividindo-se $\begin{pmatrix} 2 \\ 16 \end{pmatrix}$

ambos os membros por pq , A equação da reta que passa por p
e tem coeficiente

$$x y \text{ angular } 2 \text{ é } p + = A) 2x - y = 0 q$$

$$\begin{matrix} B) \\ 2x \\ + \\ y \\ = \\ 0 \end{matrix}$$

OBSERVAÇÃO

$$C) 8x - 4y - 3 = 0$$

Se uma reta é paralela a um dos eixos ou passa pela
origem, então sua equação não pode ser escrita na
forma D) $4x - 2y - 1 = 0$ segmentária. E) $8x - 4y - 5 = 0$

Editora Bernoulli **81**

Frente E Módulo 08

04. (UFMG) Sejam **A** e **B** dois pontos da reta de equação **02.** (UFJF-MG–2010) Na malha quadriculada a seguir, cujos

$y = 2x + 2$, que distam duas unidades da origem. Nesse quadrados têm lados medindo 10 metros, encontra-se o

caso, a soma das abscissas de **A** e **B** é mapa de um tesouro.

A) N 5

8

8 O L Muro

B) –

5 Pinheiros S 5

C) –

8

8

D)

5

Rio

05. (UFMG) Observe a figura.

Sobre o tesouro, sabe-se que

y

• encontra-se na direção determinada pelos dois

pinheir

- está a 110 metros a leste do muro.

O valor que **Melhor** aproxima a distância do tesouro à margem do rio, em metros, é

O 2 x

A)
44,3

O gráfico da função $f(x) = ax + b$ está representado nessa B) 45,3 figura. O valor de $a + b$ é

C)
45,7

A) -2

D)
46,7

B) 2 E) 47,3

C) 7 **03.** (Unimontes-MG–2009) Um raio luminoso, emitido por

2

uma lanterna localizada no ponto $M(4, 8)$, reflete-se

D) 9 em $N(6, 0)$. A equação da semirreta r , trajetória do raio

2

refletido,
é

EXERCÍCIOS PROPOSTOS y M P 8

01. (UFMG) A reta $y = ax + 1$ intercepta a bissetriz do primeiro quadrante num ponto de abscissa -4 . O valor de a é

3

A) $-$

4

B) -01

$44N8x$

C) A) $y + 4x - 24 = 01$

4

D) 3 B) $y - 4x - 24 = 0$

4 C) $y - 4x + 24 = 0$

E) D) $y + 4x + 24 = 05$

4

82 Coleção Estudo

Estudo analítico da reta

04. (FGV-SP) A reta da figura a seguir intercepta o eixo das **08.**

(Mackenzie-SP) A distância do ponto de interseção das retas

abscissas no ponto $2x - 3y + 26 = 0$ e $5x + 2y - 49 = 0$ à origem é

y A) 13 D) 18

B) 23 E) 17

3

2,5 C) 15

2

1 09. (UNIFESP-2008) Dadas as retas $r: 5x - 12y = 42$,

$s: 5x + 16y = 56$ e $t: 5x + 20y = m$, o valor de **m** para que

O 1 2 3 4 x as três retas sejam concorrentes num mesmo ponto é

A)

14

A) $(-10, 0)$ D) $(-13, 0)$

B)

28

B) $(-11, 0)$ E) $(-14, 0)$

C)

36

C) $(-12, 0)$

D)

48

05. E) 58 (UFOP-MG-2009) A reta **r** contém os pontos $(-1, -3)$ e

$(2, 3)$. O valor de **m**, de modo que o ponto $(m, 7)$ pertença

a r, é **10.** (Cesgranrio) Se $(x, y) = (a, b)$ é a interseção das retas

$$x + 2y = 5 \text{ e } 2x - y = 10, \text{ então } a + b \text{ vale}$$

A) 1 C) 3

A)
3

B) 2 D) 4

B)
4

06. (FGV-SP) A equação da reta r da figura é C) 5

MATEMÁTICA

y D) 10

5 E) 15

4

3 **11.** (UECE) O perímetro do triângulo formado pelas interseções

das retas $x + y - 6 = 0$, $x = 1$ e $y = 1$ é igual a

2

1 r A) $2(1 + 12)$

O B) $4(2 + 12)$ 1 2 3 4 5 x

C)
 $4(1 +$

A) $y = 3x$ D) $2(2 + 12)$

5

B) $y = x$ **12.** (FCMSC-SP) As retas r e s são definidas por $y = 2x + 1$ 18

C) $y = 3x + 5$ e $3y + 2x - 2 = 0$. A reta vertical que contém o ponto de

interseção de r e s é definida por

3

D) $y = x$ 4 3 A) $x = -$

E) $y = 4x + 2$ 8

1

B)
y
=

07. 4 (FGV-MG) A equação da reta que passa pela origem e pela

interseção das retas $2x + y - 6 = 0$ e $x - 3y + 11 = 0$ 1 C) $x = -$ tem a seguinte equação: 8

A) $y = 2x$ D) $y = 5x$ 3 D) $x = 8$ B) $y = 3x$ E) $y = 6x$

C) $y = 4x$ E) $8y - 8x + 5 = 0$

Frente E Módulo 08

13. (UFMG) Observe a figura.

y GABARITO

r

2

Fixação

01.
D

60°

O 3 x 02. E

03.
C

04.
B

A ordenada do ponto de interseção da reta **r** com o eixo 05. B
das ordenadas é

A) $2 - 3^{\frac{1}{3}}$ B) $2^{\frac{1}{3}}$ C) $3^{\frac{1}{3}}$ D) $3 - 2^{\frac{1}{3}}$ E) $3^{\frac{1}{3}} - 2$

3

B) $3 - 2^{\frac{1}{3}}$ E) $3^{\frac{1}{3}} - 2$

C) $2 - 01$. E $^{\frac{1}{3}}$

SEÇÃO ENEM 02. D

03.
C

01. Considere um móvel que descreve uma trajetória com velocidade constante, cujo gráfico do espaço em função do tempo sai da origem do sistema cartesiano e contém o ponto $P(13, 3)$. O ângulo que o segmento OP forma com o eixo das abscissas é

A) 0° B) 30° C) 45° D) 60° E) 90°

B) 30° E) 90°

07.
C

C) 45°

08.
A

02. A composição do lucro $L(x)$ de uma empresa depende da quantidade x de produtos vendidos, conforme o gráfico

a seguir:

$L(x)$ 10. C

11.

B

12.

C

O 100 200 300 x 13. A

A variação do lucro é maior quando a quantidade de

produtos vendidos **Seção Enem**

A) está entre 0 e 100.

B) está entre 100 e 200.

01.

D

C) está entre 200 e 300.

D) é maior que 300. 02. C

E) é indeterminada.